Maths - 8

SCERT

उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद्

गणित

(कक्षा 8)

ई-पुस्तक

इकाई : 1 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

- **परिमेय संख्याओं पर योग, अन्तर, एवं गुणा की संक्रियाएँ तथा गुणधर्म**
- **परिमेय संख्याओं के योग पर गुणा का वितरण नियम**
- **1 तथा 0 परिमेय संख्या के रूप में तथा इनके प्रगुण**
- **परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम एवं गुणात्मक प्रतिलोम**
- **किसी परिमेय संख्या में परिमेय संख्या से भाग**

1.1 भूमिका

पिछली कक्षा में आपने देखा कि परिमेय संख्याओं की आवश्यकता क्यों पड़ती है जिसके परिणामस्वरूप हमनें पूर्णांकों के समुच्चय को विस्तारित करते हुए परिमेय संख्याओं की अवधारणा को प्राप्त किया। हमने परिमेय संख्या को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिभाषित किया जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$। हमने परिमेय संख्याओं की समतुल्यता, उनके सरलतम (मानक) रूप, संख्यारेखा पर उनके निरूपण, उनकी आपस में तुलना आदि का विधिवत् अध्ययन किया। अब इस इकाई में हम परिमेय संख्याओं पर मूल संक्रियाएँ तथा उनके प्रगुणों का अध्ययन करेंगे। इसके साथ ही इस इकाई में हम परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान, दो परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याओं का समावेशन तथा परिमेय संख्या को दशमलव संख्या के रूप में व्यक्त करना और दशमलव संख्या को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना सीखेंगे।

1.2 परिमेय संख्याओं पर संक्रियाएँ

आप जानते हैं कि पूर्णांकों तथा भिन्नों पर किस प्रकार जोड़ने, घटाने, गुणा और भाग की संक्रियाएँ की जाती हैं। आइए इन मूल संक्रियाओं का परिमेय संख्याओं के सन्दर्भ में अध्ययन करें।

1.2.1 परिमेय संख्याओं का योग

आइए समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं को जोड़ें। मान लीजिए $\frac{3}{5}$ और $\frac{-13}{5}$ को जोड़ना है।

हल- $\frac{3}{5}+\left(\frac{-13}{5}\right)$

$= \frac{3-13}{5}$

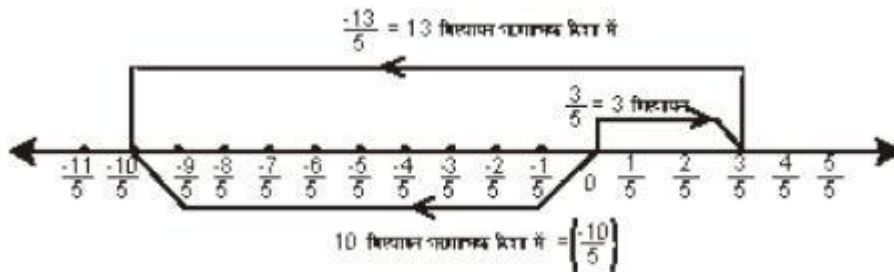
$= \frac{-10}{5}$

$= \frac{-2}{1} = -2$

इन परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने पर यही उत्तर प्राप्त होता है।

संख्या रेखा द्वारा हल

पिछली कक्षा में आप परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीख चुके हैं।

यहाँ संख्या रेखा पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक $\frac{1}{5}$ का विस्थापन है।

$\therefore \frac{3}{5}+\left(\frac{-13}{5}\right)$ = संख्या रेखा पर 0 से 3 विस्थापन और फिर वहाँ से ऋणात्मक दिशा में 13 विस्थापन

= संख्या रेखा पर 0 से ऋणात्मक दिशा में 10 विस्थापन

$= \left(\frac{-10}{5}\right)$

$= \left(\frac{-2}{1}\right)$ सरलतम रूप

$= -2$

स्पष्टतः संख्या रेखा से भी हमें वही उत्तर प्राप्त हुआ।

इन्हें कीजिए :

- $\frac{4}{7}+\frac{8}{7}$ का मान ज्ञात कीजिए।
- $\frac{5}{9}+\left(\frac{-4}{9}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2: $\frac{5}{-9}+\frac{13}{9}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{5}{-9}=\frac{5\times(-1)}{-9\times(-1)}=\frac{-5}{9}$ (ऋणात्मक हर को धनात्मक करने के लिए अंश तथा हर में (–1) से गुणा करने पर)

$\therefore \left(\frac{5}{-9}\right)+\frac{13}{9}=\left(\frac{-5}{9}\right)+\frac{13}{9}$

$= \frac{(-5)+13}{9}$

$= \frac{-5+13}{9}$

$= \frac{8}{9}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित को सरल कीजिए :

(i) $\frac{4}{7}+\left(\frac{-8}{7}\right)$ (ii) $\left(\frac{-4}{9}\right)+\left(\frac{-2}{-9}\right)$

दोनों विधियों से उत्तर ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि क्या दोनों उत्तर समान हैं ?

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

1. समान हर वाली परिमेय संख्याओं का योगफल = $\dfrac{\text{परिमेय संख्याओं के अंशों का योगफल}}{\text{समान हर}}$

अर्थात्

दो परिमेय संख्याओं $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{q}$ का योगफल = $\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$

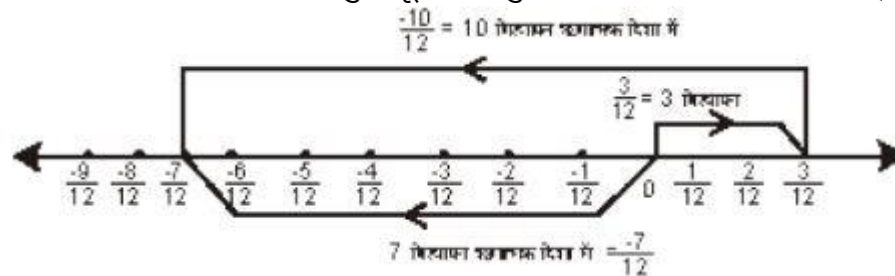
2. प्राप्त परिमेय संख्या को सरलतम रूप में लिखते हैं।

परिमेय संख्याओं का योग जब उनके हर समान नहीं हैं :

उदाहरण 1: $\frac{1}{4}$ तथा $\left(\frac{-5}{6}\right)$ का योगफल ज्ञात कीजिए।

प्रथम विधि : संख्या रेखा द्वारा

हल : $\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{3}{12}+\left(\frac{-10}{12}\right)$ (समान हर)

यहाँ संख्या रेखा पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक $\frac{1}{12}$ का विस्थापन है।

अतः $\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)$

= संख्या रेखा पर 0 से 3 धनात्मक दिशा में विस्थापन और फिर वहाँ से ऋणात्मक दिशा में 10 विस्थापन

= संख्या रेखा पर 0 से 7 विस्थापन ऋणात्मक दिशा में

$= \left(\frac{-7}{12}\right)$

द्वितीय विधि : समान हर बनाकर

$\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{3}{12}+\left(\frac{-10}{12}\right)$

$= \frac{3+(-10)}{12}$

$= \frac{3-10}{12} = \left(\frac{-7}{12}\right)$

हल : $\frac{1}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)=\frac{3}{12}+\left(\frac{-10}{12}\right)$

$= \frac{3+(-10)}{12}$

$= \frac{3-10}{12}$

$= \left(\frac{-7}{12}\right)$

उदाहरण 2: $\frac{2}{15}+\left(\frac{+9}{-10}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{2}{15}+\left(\frac{9}{-10}\right)$

$= \frac{2}{15}+\left(\frac{-9}{10}\right)$

$= \frac{4}{30}+\frac{-27}{30}$

$= \frac{4+(-27)}{30}$

$= \frac{4-27}{30}$

$= \frac{-23}{30}$

हम असमान हरों वाली दो परिमेय संख्याओं को भिन्नों की तरह जोड़ते हैं। पहले इनके हरों का ल.स.ज्ञात करते हैं, फिर हम ऐसी समतुल्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर लेते हैं जिनके हर प्राप्त ल.स. हों तथा दोनों परिमेय संख्याओं के अंश को जोड़ कर उत्तर प्राप्त करते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

> **यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ मानक रूप में दो परिमेय संख्याएँ हैं. तो योग करने से पूर्व उन्हें क्रमश: $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{q}$ के रूप में व्यक्त करते हैं जहाँ पर b और d का ल0स0 q है।**

परिमेय संख्या $\frac{-7}{-8}$ और $\frac{5}{-6}$ को जोड़ने में यदि हम भिन्नों के जोड़ने की विधि का प्रयोग करना चाहें, तो (–8) और (–6) का ल0स0 ज्ञात करना होगा। परंतु हम जानते हैं कि केवल धन पूर्णांकों का ही ल0स0 परिभाषित है। इस प्रकार हमें संख्याओं $\frac{-7}{-8}$ और $\frac{5}{-6}$ का मान बिना बदले हुए हरों को धनात्मक बनाना होगा।

कैसे ?

प्रत्येक परिमेय संख्या को ऐसी समतुल्य परिमेय संख्या में बदलना होगा जिसका हर धनात्मक हो। इस प्रकार-

$\frac{-7}{-8}=\frac{-7\times(-1)}{-8\times(-1)}=\frac{7}{8}$

तथा $\frac{5}{-6}=\frac{5\times(-1)}{-6\times(-1)}=\frac{-5}{6}$

अब उदाहरण 2 के समान हल प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि :
यदि परिमेय संख्या का हर ऋणात्मक है, तो अंश तथा हर को (–1) से गुणा करके हर को धनात्मक बना लिया जाता है।
अर्थात्
यदि $\frac{p}{-q}$ **तथा** $\frac{-p}{-q}$ **दो ऋणात्मक हर वाली परिमेय संख्याएँ हों, तो**
$\frac{p}{-q} = \frac{-p}{q}$ **तथा** $\frac{-p}{-q} = \frac{p}{q}$

•प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक रूप में व्यक्त कीजिए :
(i) $\frac{4}{-15}$ (ii) $\frac{-9}{-13}$

अभ्यास 1 (a)

1. सरल कीजिए :
(i) $\frac{4}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-4}{-5}\right)+\left(\frac{2}{-5}\right)$
2. संख्या-रेखा की सहायता से सरल कीजिए :
(i) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-3}{2}\right)$ (ii) $\left(\frac{-3}{-4}\right)+\left(\frac{5}{-6}\right)$
3. हर का ल0स0 लेकर सरल कीजिए :
(i) $\frac{5}{12}+\left(\frac{-7}{16}\right)$ (ii) $\left(\frac{-3}{-11}\right)+\left(\frac{-4}{33}\right)$
4. मान ज्ञात कीजिए :
(i) $2+\left(\frac{-1}{9}\right)$ (ii) $(-3)+\left(\frac{-2}{-3}\right)$

परिमेय संख्याओं के योग के प्रगुण :

1. संवरक प्रगुण :

उदाहरण : **परिमेय संख्याओं** $\left(\frac{2}{-15}\right)$ तथा $\left(\frac{-9}{10}\right)$ को जोड़िए। क्या प्राप्त योगफल एक परिमेय संख्या है?

हल **:** $\left(\frac{2}{-15}\right) \pm \left(\frac{-9}{10}\right)$

$= \frac{(-1)\times 2}{(-1)\times(-15)}+\left(\frac{-9}{10}\right)$ [हर को धनात्मक करने के लिए अंश तथा हर में (–1) से गुणा]

$= \left(\frac{-2}{15}\right)+\frac{-9}{10}$

$= \frac{-2\times 2+(-9)\times 3}{30}$ [15, 10 का ल0स0 = 30]

$= \frac{-4+(-27)}{30}$

$= \frac{-4 - 27}{30}$

$= \frac{-31}{30}$, जो एक परिमेय संख्या है।

∴ प्राप्त योगफल एक परिमेय संख्या है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्या-युग्म को जोड़िए तथा सत्यापित कीजिए कि योगफल एक परिमेय संख्या हैं :

(i) $\left(\frac{-3}{-1}\right)+\left(\frac{-4}{-3}\right)$ (ii) $\left(\frac{-7}{24}\right)+\left(\frac{2}{-9}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि परिमेय संख्याओं का योगफल भी एक परिमेय संख्या होता है । अर्थात्

यदि $\frac{p}{q}$ **तथा** $\frac{r}{s}$ **परिमेय संख्याएँ हैं, तो उनका योगफल** $\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)$ **भी एक परिमेय संख्या होती है।अत: परिमेय संख्याओं में 'योग की संक्रिया' संवरक प्रगुण को संतुष्ट करती है।**

2. क्रम विनिमेय प्रगुण :

उदाहरण 1: निम्नांकित में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$

क्या ये दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं ?

हल :(i) $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}+\left(\frac{-5}{6}\right)$

$= \frac{(-35)+12}{42}$ $= \frac{12+(-35)}{42}$

$= \frac{-35+12}{42}$ $= \frac{12-35}{42}$

$= \frac{-23}{42}$ $= \frac{-23}{42}$

दोनों स्थितियों में योगफल से प्राप्त परिमेय संख्याएँ बराबर हैं ।

प्रयास कीजिए :

सरल कीजिए :

(1) $\left(\frac{-5}{-8}\right)+\left(\frac{-7}{12}\right)$ (2) $\left(\frac{-7}{12}\right)+\left(\frac{-5}{-8}\right)$ तथा सत्यापित कीजिए कि दोनों प्रकार से प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

इस प्रकार हम देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में जोड़ने पर योगफल समान होता है।

अर्थात् यदि $\frac{p}{q}$ **तथा** $\frac{r}{s}$ **कोई भी दो परिमेय संख्याए हैं, तो** $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{r}{s}+\frac{p}{q}$

अत: परिमेय संख्याओं में 'योग की संक्रिया' क्रम विनिमेय प्रगुण को संतुष्ट करती है।

3. साहचर्य प्रगुण :

उदाहरण 1: निम्नांकित परिमेय संख्याओं के योगफल को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए।

(i) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{3}{4}\right]+\left(\frac{1}{-5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-2}{3}\right)+\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{-5}\right)\right]$

इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्याओं में क्या सम्बन्ध है ?

हल :

(i) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{3}{4}\right]+\left(\frac{1}{-5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-2}{3}\right)+\left[\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{-5}\right)\right]$

$= \left[\frac{(-8)+9}{12}\right]+\left(\frac{-1}{5}\right)$ $= \left(\frac{-2}{3}\right)+\left[\frac{+(-4)}{20}\right]$

$= \left(\frac{-8+9}{12}\right)+\left(\frac{-1}{5}\right)$ $= \left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{15-4}{20}\right)$

$= \frac{1}{12}+\left(\frac{-1}{5}\right)$ $= \left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{1}{20}$

$= \frac{5+(-12)}{60}$ $= \frac{(-40)+33}{60}$

$= \frac{5-12}{60}$ $= \frac{-40+33}{60}$

$= \frac{-7}{60}$ $= \frac{-7}{60}$

आप देखते हैं कि दोनों स्थितियों में योगफल से प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं के योगफल को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि योगफल से प्राप्त दोनों परिमेय संख्याएँ समान हैं।

(i) $\left[\left(\frac{-4}{7}\right)+\frac{1}{4}\right]+\left(\frac{1}{-2}\right)$ **(ii)** $\left(\frac{-4}{7}\right)+\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{-2}\right)\right]$

इस प्रकार आप देखते हैं कि :

तीन परिमेय संख्याओं के जोड़ने के लिए पहली दो परिमेय संख्याओं के योगफल में तीसरी संख्या जोड़ें अथवा पहली संख्या अंतिम दो संख्याओं के योगफल में जोड़ें तो दोनों ही स्थितियों में योगफल समान होता है।

निष्कर्ष :

यदि $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ **तथा** $\frac{t}{u}$ **कोई भी तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो**

$$\left(\frac{p}{q}+\frac{r}{s}\right)+\frac{t}{u}=\frac{p}{q}+\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)$$

अत: परिमेय संख्याओं में 'योग की संक्रिया' साहचर्य प्रगुण का पालन करती है।

परिमेय संख्याओं के योग के इस प्रगुण के फलस्वरूप हम तीन या अधिक परिमेय संख्याओं को भी किसी कोष्ठक के प्रयोग किए बिना जोड़ सकते हैं।

उदाहरण 2: का मान ज्ञात कीजिए। $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{17}{10}+\left(\frac{7}{-12}\right)$

हल : $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{17}{10}+\left(\frac{7}{-12}\right) = \left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{17}{10}+\left(\frac{-7}{12}\right)$

$= \frac{(-50)+102+(-35)}{60}$ [6, 10, 12 का ल0स0 = 60]

$= \frac{-50 \ +102-35}{60}$

$= \frac{17}{60}$

अभ्यास 1(b)

1. निम्नांकित कथनों में सत्य/असत्य बताइए :

(i) $\left(\frac{-4}{5}\right)+\left(\frac{-4}{5}\right)=\left(\frac{-8}{5}\right)$

(ii) $\left[\frac{-6}{7}+6\right]$ परिमेय संख्या नहीं है।

(iii) दो परिमेय संख्याओं के जोड़ने का क्रम बदलने पर योगफल वही रहता है।

(iv) तीन परिमेय संख्याओं का योगफल परिमेय संख्या नहीं होती है।

2. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को जोड़कर बताइए कि योगफल परिमेय संख्या है अथवा नहीं:

(i) $\left(\frac{-3}{4}\right)$ और 3 (ii) (-1) और $\left(\frac{-2}{3}\right)$

3. दोनों पक्षों को हल करके सत्यापित कीजिए :

(i) $\left(\frac{-5}{8}\right)+\left(\frac{-9}{13}\right)=\left(\frac{-9}{13}\right)+\left(\frac{-5}{8}\right)$

(ii) $3+\left(\frac{-7}{12}\right)=\left(\frac{-7}{12}\right)+3$

(iii) $\left[\left(\frac{-4}{7}\right)+\frac{1}{4}\right]+\left(\frac{7}{-16}\right)=\left(\frac{-4}{7}\right)+\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{7}{-16}\right)\right]$

4. यदि A और B दो परिमेय संख्याएँ हों और $A + B = \frac{-15}{11}$ हो, तो B + A ज्ञात कीजिए।

5. निम्नांकित रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए :

(i) $(\ldots)+\left(\frac{-12}{7}\right)=\left(\frac{-12}{7}\right)+\left(\frac{5}{-11}\right)$

(ii) $[(-10)+\ldots]+\left(\frac{-7}{12}\right)=(-10)+\left[\frac{5}{6}+\left(\frac{-7}{12}\right)\right]$

6. सरल कीजिए :

(i) $\frac{3}{4}+\left(\frac{-8}{9}\right)+\frac{5}{8}$ (ii) $\left(\frac{-9}{10}\right)+\frac{22}{15}+\left(\frac{13}{-20}\right)$

7. निम्नांकित को योग की संक्रिया के प्रगुणों का प्रयोग करके हल कीजिए :

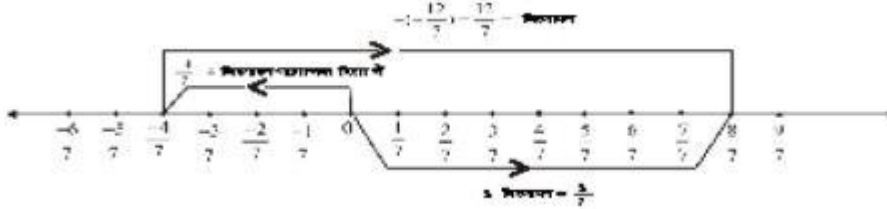
(i) $\frac{3}{7}+\left(\frac{-5}{14}\right)+\left(\frac{-1}{14}\right)$ (ii) $\frac{2}{5}+\left(\frac{-8}{-3}\right)+\left(\frac{4}{-5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$

1.2.2 परिमेय संख्याओं का घटाना

परिमेय संख्याओं का घटाना जब उनके हर समान हैं :

उदाहरण 1: $\left(\frac{-4}{7}\right)$ में से $\left(\frac{-12}{7}\right)$ घटाइए।

प्रथम विधि : संख्या रेखा द्वारा हल

यहाँ संख्या रेखा पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक $\frac{1}{7}$ का विस्थापन है।

$\left(\frac{-4}{7}\right)-\left(\frac{-12}{7}\right)=\left(\frac{-4}{7}\right)+\frac{12}{7}$

= संख्या रेखा पर 0 से ऋणात्मक दिशा में 4विस्थापन और फिर वहीं से धनात्मक दिशा में 12 विस्थापन

= संख्या रेखा पर 0 से 8 विस्थापन

$=\frac{8}{7}$

द्वितीय विधि :

हल : $\left(\frac{-4}{7}\right)-\left(\frac{-12}{7}\right)=\frac{(-4)-(-12)}{7}$

$=\frac{-4+12}{7}$

$=\frac{8}{7}$

उदाहरण 2: $\left(\frac{3}{-4}\right)-\left(\frac{-5}{-4}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\frac{3}{-4}\right)-\left(\frac{-5}{-4}\right)=\frac{(-1)\times 3}{(-1)\times(-4)}-\frac{(-1)\times(-5)}{(-1)\times(-4)}$

$=\left(\frac{-3}{4}\right)-\frac{5}{4}$

$=\frac{(-3)-5}{4}$

$=\frac{-3-5}{4}$

$=\frac{-8}{4}$

$=\frac{-2\times 4}{4}$

$=-2$ (का मान ज्ञात कीजिए।)

हल :

(i) $\left(\frac{7}{-1}\right)-\left(\frac{-3}{1}\right)$ (ii) $\left(\frac{-9}{-3}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

समान हर वाली परिमेय संख्याओं का अन्तर = $\frac{\text{परिमेय संख्याओं के अंशों का अन्तर}}{\text{समान हर}}$

अर्थात्

यदि दो परिमेय संख्याएँ $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{q}$ हों, तो $\frac{p}{q}-\frac{r}{q}=\frac{p-r}{q}$

परिमेय संख्याओं का घटाना जब उनके हर समान नहीं हैं :

उदाहरण 1 $\left(\frac{-5}{4}\right)$ में से $\left(\frac{5}{-6}\right)$ को घटाइए।

प्रथम विधि : संख्या रेखा द्वारा

हल : $\frac{5}{-6}=\frac{5\times(-1)}{(-6)\times(-1)}$

$=\frac{-5}{6}$

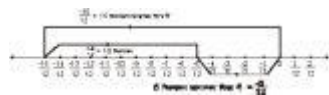
$\frac{-5}{4}=\frac{-5\times 3}{4\times 3}=\frac{-15}{12}$

तथा $\frac{-5}{6}=\frac{-5\times 2}{6\times 2}=\frac{-10}{12}$ (समान हर)

$\therefore \left(\frac{-5}{4}\right)-\left(\frac{5}{-6}\right)=\left(\frac{-5}{4}\right)-\left(\frac{-5}{6}\right)$

$=\left(\frac{-15}{12}\right)-\left(\frac{-10}{12}\right)$ (4एवं 6 का ल0स0= 12)

$=\left(\frac{-15}{12}\right)+\frac{10}{12}$

यहाँ संख्या रेखा पर एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक $\frac{1}{12}$ का विस्थापन है।

$\therefore \frac{-5}{4}-\left(\frac{5}{-6}\right)$ = संख्या रेखा पर 0 से ऋणात्मक दिशा में 15 विस्थापन और फिर वहीं से धनात्मक दिशा 10 विस्थापन।

= संख्या रेखा पर 0 से ऋणात्मक दिशा में 5 विस्थापन

$=\left(\frac{-5}{12}\right)$

द्वितीय विधि : समान हर बना कर

हल: $\left(\frac{-5}{4}\right)-\left(\frac{5}{-6}\right)=\frac{-5}{4}-\left(\frac{-5}{6}\right)$

$=\frac{-5}{4}+\frac{5}{6}$

$=\frac{-15}{12}+\frac{10}{12}$ (4 तथा 6 का ल0स0= 12)

$= \frac{-15 + 10}{12}$

$= \frac{-5}{12}$

प्रयास कीजिए :

सरल कीजिए :

(i) $\left(\frac{-5}{12}\right) - \left(\frac{7}{-18}\right)$ (ii) $\left(\frac{-5}{16}\right) - \left(\frac{1}{-12}\right)$

(iii) $\frac{4}{15} - \left(\frac{-9}{10}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

> यदि $\frac{a}{b}$ **तथा** $\frac{c}{d}$ **मानक रूप में दो परिमेय संख्याएँ हैं तो घटाने से पूर्व उन्हें क्रमशः** $\frac{p}{q}$ **और** $\frac{r}{q}$ **के रूप में व्यक्त करते हैं, जहाँ पर b और d का ल0स0 q है।**

उदाहरण 2: दो परिमेय संख्याओं का योगफल $\left(\frac{-1}{2}\right)$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\left(\frac{-8}{19}\right)$ हो, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।।

हल: दूसरी संख्या, योगफल $\left(\frac{-1}{2}\right)$ में से पहली संख्या $\left(\frac{-8}{19}\right)$ को घटाने पर प्राप्त होगी।

अतः दूसरी संख्या= $\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-8}{19}\right)$

$= \left(\frac{-1}{2}\right) + \frac{8}{19}$

$= \frac{-19}{38} + \frac{16}{38}$ (हरों 2 और 19 ल0स0= 38)

$= \frac{-19 + 16}{38}$

$= \frac{-3}{38}$

उदाहरण 3: सरल कीजिए :

$\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{5}{9} - \left(\frac{-7}{6}\right)$

हल: $\left(\frac{-2}{3}\right) + \frac{5}{9} - \left(\frac{-7}{6}\right)$

$= \frac{-2}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{6}$

$= \frac{-12}{18} + \frac{10}{18} + \frac{21}{18}$ (हरों 3, 9, 6 का ल0स0 = 18)

$= \frac{-12 + 10 + 21}{18}$

$= \frac{19}{18} = 1\frac{1}{18}$

परिमेय संख्याओं के घटाने की संक्रिया के प्रगुण

1. संवरक प्रगुण

उदाहरण 1: $\left(\frac{-5}{8}\right)$ **में से** $\left(\frac{3}{-7}\right)$ घटाइए। क्या प्राप्त उत्तर एक परिमेय संख्या है ?

हल: $\left(\frac{-5}{8}\right)-\left(\frac{3}{-7}\right)$

$= \left(\frac{-5}{8}\right)-\left(\frac{-3}{7}\right)$

$= \frac{-5}{8}+\frac{3}{7}$

$= \frac{-35}{56}+\frac{24}{56}$

$= \frac{-35+24}{56}$

$= \frac{-11}{56}$

प्राप्त उत्तर एक परिमेय संख्या है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित को सरल कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि प्राप्त उत्तर एक परिमेय संख्या है :

(i) $\left(\frac{-5}{27}\right)-\left(\frac{10}{-9}\right)$ (ii) $\frac{7}{10}-\left(\frac{-5}{8}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

यदि $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ परिमेय संख्याएँ हैं तो उनका अन्तर $\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)$ भी परिमेय संख्या होता है। अत: परिमेय संख्याओं में 'घटाने की संक्रिया' संवरक प्रगुण को सतुष्ट करती है।

2. क्रम विनिमेय प्रगुण

उदाहरण 1: निम्नांकित में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\frac{11}{24}-\left(\frac{-8}{9}\right)$ (ii) $\left(\frac{-8}{9}\right)-\frac{1}{24}$

क्या ये दोनों परिमेय संख्याएँ बराबर हैं ?

हल:(i) $\frac{11}{24}-\left(\frac{-8}{9}\right)$ (ii) $\left(\frac{-8}{9}\right)-\frac{1}{24}$

$= \frac{1}{24}+\frac{8}{9} = \frac{-64}{72}-\frac{3}{72}$

$= \frac{3}{72}+\frac{64}{72} = \frac{-64-3}{72}$

$= \frac{3+64}{72} = \frac{-67}{72}$

$= \frac{67}{72} \cdot -\frac{67}{72}$

दोनों स्थितियों में घटाने से प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान नहीं हैं।

अर्थात् $\frac{1}{24}-\left(\frac{-8}{9}\right) \neq \left(\frac{-8}{9}\right)-\frac{1}{24}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि दोनों परिमेय संख्याएँ समान नहीं हैं।

(i) $\left(\frac{-6}{3}\right)-\left(\frac{5}{-1}\right)$ (ii) $\left(\frac{5}{-1}\right)-\left(\frac{-6}{3}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

दो परिमेय संख्याओं को किसी भी क्रम में घटाने पर अन्तर समान नहीं रहता है ।

अर्थात्

यदि $\frac{p}{q}$ **तथा** $\frac{r}{s}$ **कोई भी दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो** $\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\neq\frac{r}{s}-\frac{p}{q}$

अत: परिमेय संख्याओं के 'घटाने में क्रम विनिमेय (Commutative) प्रगुण' नहीं होता है।

3. साहचर्य प्रगुण :

उदाहरण १: सरल कीजिए :

(i) $\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{-5}\right)\right]-\left(\frac{-2}{3}\right)$ (ii) $\frac{3}{4}-\left[\left(\frac{1}{-5}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\right]$

क्या इस प्रकार प्राप्त दोनों परिमेय संख्याएँ समान हैं ?

हल:(i) $\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{-5}\right)\right]-\left(\frac{-2}{3}\right)$ (ii) $\frac{3}{4}-\left[\left(\frac{1}{-5}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\right]$

$=\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{5}\right]+\frac{2}{3}$ $=\frac{3}{4}-\left[\frac{-1}{5}+\frac{2}{3}\right]$

$=\left(\frac{15+4}{20}\right)+\frac{2}{3}$ $=\frac{3}{4}-\left[\frac{-3+10}{15}\right]$

$=\frac{19}{20}+\frac{2}{3}$ $=\frac{3}{4}-\frac{7}{15}$

$=\frac{57+40}{60}$ $=\frac{45-28}{60}$

$=\frac{97}{60}$ $=\frac{17}{60}$

दोनों स्थितियों में प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान नहीं हैं ।

अर्थात् $\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{-5}\right)\right]-\left(\frac{-2}{3}\right)\neq\frac{3}{4}-\left[\left(\frac{1}{-5}\right)-\left(\frac{-2}{3}\right)\right]$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि प्राप्त दोनों परिमेय संख्याएँ समान नहीं हैं :

(i) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)-\left(\frac{-3}{2}\right)\right]-\frac{1}{6}$ (ii) $\left(\frac{-2}{3}\right)-\left[\left(\frac{-3}{2}\right)-\frac{1}{6}\right]$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

परिमेय संख्याओं को घटाने के लिए पहली दो संख्याओं के अन्तर में से तीसरी संख्या घटायें अथवा पहली संख्या में से, अन्तिम दो संख्याओं के अन्तर को घटायें, तो दोनों स्थितियों में प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान नहीं होती हैं।

अर्थात्

यदि $\frac{p}{q}, \frac{r}{s}$ **तथा** $\frac{t}{u}$ **कोई भी तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो** $\left(\frac{p}{q}-\frac{r}{s}\right)-\frac{t}{u} \neq \frac{p}{q}-\left(\frac{r}{s}-\frac{t}{u}\right)$

अतः परिमेय संख्याएँ 'घटाने में साहचर्य (A◌ेदम्म्[a◌ूग्न) प्रगुण' का पालन नहीं करती हैं।

अभ्यास 1(म)

1. हल कीजिए

(i) $\frac{2}{3}-\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{2}{3}-\left(\frac{-5}{3}\right)$

(iii) $\left(\frac{-2}{3}\right)-\left(\frac{-5}{3}\right)$ (iv) $\left(\frac{-2}{3}\right)-\frac{5}{3}$

2. निम्नांकित को संख्या-रेखा की सहायता से सरल करके परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए :

(i) $\frac{3}{7}-\frac{8}{7}$

(ii) $\left(\frac{-4}{6}\right)-\left(\frac{3}{4}\right)$

3. इन्हें अभ्यास पुस्तिका में लिख कर रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

(i) $\left(\frac{-5}{3}\right)-\left(\frac{-4}{2}\right)=\ldots$ (ii) $\left(\frac{-7}{9}\right)-\ldots=3$

(iii) $2-\ldots=\left(\frac{-3}{4}\right)$ (iv) $\ldots-\left(\frac{-2}{3}\right)=\left(\frac{5}{-6}\right)$

4. (i) $\frac{6}{7}$ में कौन सी संख्या जोड़ें कि योगफल $\left(\frac{-2}{9}\right)$ हो?

(ii) $\left(\frac{-7}{2}\right)$ में कितना जोड़ें कि योगफल $\frac{5}{6}$ हो ?

5. दो परिमेय संख्याओं का योगफल –5 हैं ।यादि इनमें से एक संख्या $\left(\frac{-6}{7}\right)$ हो, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

6. सरल कीजिए :

(i) $\frac{1}{6}+\left(\frac{-2}{5}\right)-\left(\frac{-2}{5}\right)$ (ii) $\frac{3}{8}-\left(\frac{-2}{3}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)$

7. निम्नांकित में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

(i) $\frac{2}{5}$ में से $\left(\frac{-2}{5}\right)$ घटाने पर शेषफल शून्य होता है।

(ii) $\left(\frac{-2}{7}\right)-\frac{3}{7}=\frac{-3}{7}-\left(\frac{-2}{7}\right)$

(iii) $\left(\frac{-3}{4}\right)-\left(\frac{-7}{4}\right)>\frac{1}{4}$

(iv) $-5 < \left[\left(\frac{-2}{7}\right) - \frac{8}{7}\right]$

1.2.3 परिमेय संख्याओं का गुणा

निम्नांकित उदाहरणों को समझिए।

उदाहरण १: $\left(\frac{-3}{5}\right)$ को $\frac{4}{7}$ से गुणा कीजिए।

हल: $\left(\frac{-3}{5}\right) \times \frac{4}{7} = \frac{(-3) \times 4}{5 \times 7} \cdot \frac{-12}{35}$

$= -\frac{12}{35}$

उदाहरण 2: $\left(\frac{-4}{9}\right) \times (-27)$ को सरल कीजिए।

हल: $\left(\frac{-14}{9}\right) \times (-27) = \left(\frac{-4}{9}\right) \times \left(\frac{-27}{1}\right)$

$= \frac{(-4) \times (-27)}{9 \times 1}$

$= \frac{4 \times 27}{9}$

$= \frac{4 \times 3 \times 9}{9}$

$= \frac{4 \times 3}{1} = \frac{12}{1} = 12$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित को सरल कीजिए :

(i) $\left(\frac{5}{-7}\right) \times \left(\frac{-13}{6}\right)$ (ii) $\left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-15}{-4}\right)$ (iii) $\frac{49}{9} \times \left(\frac{-36}{4}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

याfद $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ दो परिमेय संख्याएँ हों, तो $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s}$

अभ्यास 1(d)

1. हल कीजिए :

(i) $\left(\frac{-9}{8}\right) \times \left(\frac{-32}{-3}\right)$ (ii) $(-21) \times \left(\frac{-7}{6}\right)$

(iii) $\left(\frac{-36}{5}\right) \times \left(\frac{10}{-3}\right)$ (iv) $\frac{13}{15} \times \left(\frac{-25}{26}\right)$

2. गुणा कीजिए :

(i) $\frac{7}{6}$ keâes (-24) mes (ii) $\left(\frac{-9}{8}\right)$ keâes $\left(\frac{-16}{-3}\right)$ mes

(iii) $\left(\frac{16}{-21}\right)$ keâes $\left(\frac{-14}{5}\right)$ mes (iv) $\left(\frac{-13}{5}\right)$ keâes $\left(\frac{-11}{9}\right)$ से

परिमेय संख्याओं के गुणा की संक्रिया के प्रगुण :

1. संवरक प्रगुण

उदाहरण १: परिमेय संख्याओं $\left(\frac{-8}{7}\right)$ और $\left(\frac{-14}{-15}\right)$ का गुणा कीजिए। क्या गुणनफल परिमेय संख्या है ?

हल: $\left(\frac{-8}{7}\right) \times \frac{-14}{-15} = \frac{-8 \times (-14)}{7 \times (-15)}$

$= \frac{112}{-105}$

$= \frac{16}{-15} = -\frac{16}{15}$

प्राप्त गुणनफल एक परिमेय सख्ंया है।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोहल कीजिए तथा सत्यापित कीजिए कि प्राप्त गुणनफल एक परिमेय संख्या है :

(i) $\left(\frac{15}{-2}\right) \times \left(\frac{-4}{1}\right)$ **(ii)** $\left(\frac{-3}{-8}\right) \times \left(\frac{10}{-9}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि,

परिमेय संख्याओं का गुणनफल भी परिमेय संख्या होती है। अर्थात्

याfद $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हों, तो उनका गुणनफल $\left(\frac{p}{q} \times \frac{r}{s}\right)$ भी परिमेय संख्या होता है।

अत: परिमेय संख्याओं में गुणा की संक्रिया 'संवरक प्रगुण' का पालन करती है।

2. क्रम विनिमेय प्रगुण :

उदाहरण 1 निम्नांकित में से प्रत्येक कोएक परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए :

$\left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{7}{-1}\right)$ तथा $\left(\frac{7}{-1}\right) \times \left(\frac{-3}{4}\right)$

इस प्रकार प्राप्त परिमेय संख्याओं में क्या सम्बन्ध है ?

हल: (i) $\left(\frac{-3}{4}\right) \times \left(\frac{7}{-1}\right)$ (ii) $\left(\frac{7}{-1}\right) \times \left(\frac{-3}{4}\right)$

$= \frac{(-3) \times 7}{4 \times (-1)}$ $= \frac{7 \times (-3)}{(-1) \times 4}$

$= \frac{-21}{-4}$ $= \frac{-21}{-4}$

$= \frac{21}{4}$ $= \frac{21}{4}$

दोनों स्थितियों में गुणनफल से प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोहल कीजिए तथा दिखाइए कि दोनों स्थितियों में प्राप्त गुणनफल समान हैं :

1. $\left(\frac{-2}{-5}\right)\times\left(\frac{7}{-4}\right)$ **तथा** $\left(\frac{7}{-4}\right)\times\left(\frac{-2}{-5}\right)$

2. $\left(\frac{-3}{2}\right)\times\left(\frac{5}{-6}\right)$ **तथा** $\left(\frac{5}{-6}\right)\times\left(\frac{-3}{2}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

दो परिमेय संख्याओं के गुणा में गुण्य और गुणक का स्थान बदलने पर गुणनफल समान रहता है। अर्थात्

यादि $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{r}{s}\times\frac{p}{q}$

अत: परिमेय संख्याओं में गुणा की संक्रिया 'क्रम विनिमेय (Commutative) प्रगुण' का पालन करती है।

3. साहचर्य प्रगुण :

उदाहरण 1: निम्नांकित परिमेय संख्याओं के गुणनफल से परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए :

(i) $\left[\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{-7}\right)\right]\times\frac{2}{9}$ (ii) $\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left[\left(\frac{3}{-7}\right)\times\frac{2}{9}\right]$

प्राप्त परिमेय संख्याओं में क्या सम्बन्ध है ?

हल:(i) $\left[\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{3}{-7}\right)\right]\times\frac{2}{9}$ (ii) $\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left[\left(\frac{3}{-7}\right)\times\frac{2}{9}\right]$

$=\left[\frac{(-4)\times 3}{5\times(-7)}\right]\times\frac{2}{9}$ $=\left(\frac{-4}{5}\right)\times\frac{3\times 2}{(-7)\times 9}$

$=\left(\frac{-12}{-35}\right)\times\frac{2}{9}$ $=\left(\frac{-4}{5}\right)\times\left(\frac{6}{-63}\right)$

$=\frac{-24}{-315}$ $=\frac{(-4)\times 6}{5\times(-63)}$

$=\frac{(-3)\times 8}{(-3)\times 105}$ $=\frac{-24}{-315}$

$=\frac{8}{105}$ $=\frac{(-3)\times 8}{(-3)\times 105}$

$=\frac{8}{105}$

दोनों स्थितियों में गुणनफल से प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोसरल करके परिमेय संख्याएँ प्राप्त कीजिए तथा दिखाइए कि दोनों स्थितियों में प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

1. $\left[\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left(\frac{3}{-2}\right)\right]\times\left(\frac{-4}{-5}\right)$ तथा $\left(\frac{-7}{9}\right)\times\left[\left(\frac{3}{-2}\right)\times\left(\frac{-4}{-5}\right)\right]$
2. $\left[\left(\frac{2}{-3}\right)\times\left(\frac{-3}{-4}\right)\right]\times\left(\frac{-1}{2}\right)$ तथा $\left(\frac{2}{-3}\right)\times\left[\left(\frac{-3}{-4}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)\right]$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

यादि $\frac{p}{q},\frac{r}{s}$ **तथा $\frac{t}{u}$ कोई भी तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो** $\left(\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\right)\times\frac{t}{u}=\frac{p}{q}\times\left(\frac{r}{s}\times\frac{t}{u}\right)$

अत: परिमेय संख्याओं में गुणा की संक्रिया ‘साहचर्य (Associative) प्रगुण’ का पालन करती है।

परिमेय संख्याओं के गुणा के इस प्रगुण के फलस्वरूप हम तीन या अधिक परिमेय संख्याओं कोभी बिना किसी कोष्ठक के प्रयोग किए गुणा कर सकते हैं।

उदाहरण : सरल कीजिए :

$$\left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{-10}{-9}\right)\times\left(\frac{21}{-4}\right)\times(-6)$$

हल: $\left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{-10}{-9}\right)\times\left(\frac{21}{-4}\right)\times(-6)$

$$= \frac{(-3)\times(-10)\times 21\times(-6)}{5\times(-9)\times(-4)\times 1}$$

$$= \frac{-3\times 10\times 21\times 6}{5\times 9\times 4\times 1}$$

$= -21$

1.2.4 परिमेय संख्याओं के योग पर गुणा का वितरण प्रगुण

पूर्णांकों में हम पढ़ चुके हैं कि :

$4\cdot(5+6) = 4\cdot 5 + 4\cdot 6$

$(-5)\cdot(6+7) = (-5)\cdot 6 + (-5)\cdot 7$

$6\cdot[(-7)+(-8)] = 6\cdot(-7) + 6\cdot(-8)$

क्या यह प्रगुण परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है ?

उदाहरण : निम्नांकित कोसरल कीजिए :

(i) $\left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{-7}{5}\right)\right]$ (ii) $\left(\frac{-4}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{-4}{3}\right)\times\left(\frac{-7}{5}\right)$

हल: (i) $\left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{-7}{5}\right)\right]$ (ii) $\left(\frac{-4}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{-4}{3}\right)\times\left(\frac{-7}{5}\right)$

$= \left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{5}{10}+\frac{(-14)}{10}\right]$ $= \frac{(-4)\times 1}{3\times 2}+\frac{(-4)\times(-7)}{3\times 5}$

$= \left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{5+(-14)}{10}\right]$ $= \frac{-4}{6}+\frac{28}{15}$

$= \left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{5-14}{10}\right]$ $= \frac{-20}{30}+\frac{56}{30}$

$= \left(\frac{-4}{3}\right)\times\left(\frac{-9}{10}\right)$ $= \frac{(-20)+56}{30}$

$= \frac{(-4)\times(-9)}{3\times 10}$ $= \frac{36}{30}$

$= \frac{36}{30}$

$= \frac{6}{5}$

हम देखते हैं कि दोनों स्थितियों में प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

$$\therefore \left(\frac{-4}{3}\right)\times\left[\frac{1}{2}+\left(\frac{-7}{5}\right)\right] = \left(\frac{-4}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(\frac{-4}{3}\right)\times\left(\frac{-7}{5}\right)$$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोसरल करके सत्यापित कीजिए कि दोनों स्थितियों में प्राप्त परिमेय संख्याएँ समान हैं।

$\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left[\left(\frac{4}{-5}\right)+\left(\frac{-6}{-7}\right)\right]$ तथा $\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{4}{-5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)\times\left(\frac{-6}{-7}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

एक परिमेय संख्या का दो परिमेय संख्याओं के योगफल में गुणा करने से प्राप्त गुणनफल, इस परिमेय संख्या का दोनों परिमेय संख्याओं में अलग-अलग गुणा करने पर प्राप्त गुणनफलों के योगफल के समान है।

अर्थात्

यािद $\frac{p}{q},\frac{r}{s}$ **तथा** $\frac{t}{u}$ **तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो** $\frac{p}{q}\times\left(\frac{r}{s}+\frac{t}{u}\right)=\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}+\frac{p}{q}\times\frac{t}{u}$

अत: परिमेय संख्याओं के योगफल पर गुणन का वितरण (Distributive) प्रगुण लागू होता है।

अभ्यास 1(e)

1.निम्नांकित कथनों में से सत्य कथन कोचुनिए :

(i) $\left(\frac{2}{-5}\right)\times\left(\frac{-3}{4}\right)=\left(\frac{-3}{4}\right)\times\left(\frac{2}{-5}\right)$

(ii) $\left[\left(\frac{-2}{-3}\right)\times\frac{1}{5}\right]\times\left(\frac{-2}{7}\right)=\left(\frac{-2}{-3}\right)\times\left[\frac{1}{5}\times\left(\frac{-2}{7}\right)\right]$

(iii) $\frac{3}{4}$ और $\left(\frac{-5}{7}\right)$ का गुणनफल परिमेय संख्या नहीं है।

(iv) $\left[\left(\frac{7}{-8}\right)+\left(\frac{-5}{6}\right)\right]\times\frac{3}{4}=\left(\frac{7}{-8}\right)\times\frac{3}{4}+\left(\frac{-5}{6}\right)\times\frac{3}{4}$

2.निम्नांकित कथनों कोगुणा की क्रिया करके सत्यापित कीजिए :

(i) $\frac{2}{7}\times\left(\frac{-1}{8}\right)=\left(\frac{-1}{8}\right)\times\frac{2}{7}$

(ii) $\left(\frac{-8}{9}\right)\times\frac{5}{7}=\frac{5}{7}\times\left(\frac{-8}{9}\right)$

(iii) $\left(\frac{-8}{7}\right)\times\left[\frac{1}{2}\times\left(\frac{-4}{3}\right)\right]=\left[\left(\frac{-8}{7}\right)\times\frac{1}{2}\right]\times\left(\frac{-4}{3}\right)$

3. निम्नांकित में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में कीजिए और प्रत्येक कथन के आगे सम्बन्धित प्रगुण
का नाम भी लिखिए :

(i) $\frac{2}{1}\times\left(\frac{-3}{7}\right)=\left(\frac{-3}{7}\right)\times\ldots$

(ii) $\ldots\times\left[\frac{2}{3}\times\left(\frac{3}{-2}\right)\right]=\left[\left(\frac{-1}{3}\right)\times\ldots\right]\times\left(\frac{3}{-2}\right)$

(iii) $\left(\frac{-5}{7}\right)\times\left[\ldots+\left(\frac{-4}{7}\right)\right]=\left(\frac{-5}{7}\right)\times\frac{2}{5}+\ldots\times\left(\frac{-4}{7}\right)$

4. सरल कीजिए :

(i) $(-3)\times\left(\frac{-0}{9}\right)\times\left(\frac{8}{-5}\right)\times\left(\frac{-1}{-6}\right)$ (ii) $\left(\frac{-1}{-9}\right)\times\frac{3}{2}\times(-4)\times\left(\frac{6}{-5}\right)$

1.2.5 'शून्य' तथा 'एक' परिमेय संख्या के रूप में और इनके प्रगुण

'शून्य' एक परिमेय संख्या के रूप में

हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। 0 को $\frac{0}{1},\frac{0}{2},\frac{0}{3},...$, $\frac{0}{-1},\frac{0}{-2},\frac{0}{-3},...$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रयास कीजिए :

1. $\frac{0}{5},\frac{0}{-1},\frac{0}{0},\frac{0}{-3}$ को सरल कीजिए।
2. 0 को परिमेय संख्या $\frac{p}{q}, q \neq 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

इस प्रकार हम देखते हैं कि : $0=\frac{p}{q}$ **जहाँ** $p = 0$, q **पूर्णांक है तथा** $q \neq 0$

शून्य के प्रगुण

1. योग का तत्समक अवयव

हम जानते हैं कि किसी पूर्णांक में शून्य ० जोड़ने पर योगफल वही पूर्णांक होता है।

जैसे $(-9) + 0 = (-9)$

क्या, यह प्रगुण परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है ?

उदाहरण : हल कीजिए :

(i) $\left(\frac{-2}{3}\right)+0$ (ii) $0+\left(\frac{-2}{3}\right)$

हल: (i) $\left(\frac{-2}{3}\right)+0=\left(\frac{-2}{3}\right)+\frac{0}{3}=\frac{(-2)+0}{3}=\frac{-2}{3}$

(ii) $0+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{0}{3}+\left(\frac{-2}{3}\right)=\frac{0+(-2)}{3}=\frac{-2}{3}$

$\therefore \left(\frac{-2}{3}\right)+0=\left(\frac{-2}{3}\right)=0+\left(\frac{-2}{3}\right)$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोहल करके सत्यापित कीजिए :

$\left(\frac{-3}{5}\right)+0=\left(\frac{-3}{5}\right)=0+\left(\frac{-3}{5}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

किसी भी परिमेय संख्या में शून्य जोड़ें अथवा शून्य में वही परिमेय संख्या जोड़ें, तो योगफल समान होता है।

अर्थात्

यािद $\frac{p}{q}$ **कोई परिमेय संख्या हो,तो** $\frac{p}{q}+0=\frac{p}{q}=0+\frac{p}{q}$

इसी प्रगुण के कारण हम ‘शून्य कोपरिमेय संख्याओं के योग का तत्समक अवयव (घ्र्हूग्ूब् ातसहू)’ कहते हैं।

2. किसी परिमेय संख्या का शून्य से गुणा

हम जानते हैं कि किसी पूर्णांक कोशून्य से गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है।

जैसे, (– 4) x 0 = 0

क्या यह प्रगुण परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है ?

उदाहरण : सरल कीजिए :

(i) $\left(-\frac{6}{5}\right)\times 0$ (ii) $\left(\frac{7}{-1}\right)\times 0$

हल: (i) $\left(-\frac{6}{5}\right)\times 0=\left(\frac{-6}{5}\right)\times\frac{0}{1}=\frac{(-6)\times 0}{5\times 1}=\frac{0}{5}=0$

(ii) $\left(\frac{7}{-1}\right)\times 0=\left(\frac{7}{-1}\right)\times\frac{0}{1}=\frac{7\times 0}{(-1)\times 1}=\frac{0}{-1}=0$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $(-5)\times 0$ (ii) $\left(\frac{2}{-5}\right)\times 0$

(iii) $\left(\frac{-8}{9}\right)\times 0$ (iv) $0\times\left(\frac{-3}{-4}\right)$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

किसी परिमेय संख्या और शून्य का गुणनफल शून्य होता है। अर्थात्

यािद $\frac{p}{q}$ **कोई परिमेय संख्या हो, तो** $\frac{p}{q}\times 0=0\times\frac{p}{q}=0$

1 (एक) परिमेय संख्या के रूप में

हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। १ को

$\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{3},\ldots,\frac{10}{10},\ldots,\frac{101}{101},\ldots,\frac{-1}{-1},\frac{-5}{-5},\frac{-20}{-20},\ldots$ (एक) परिमेय संख्या के रूप में

हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है। १ को

1. $\frac{-100}{-100},\frac{501}{501},\frac{-8}{-8},\frac{-2537}{-2537}$ को सरल कीजिए।

२. १ को परिमेय संख्या $\frac{p}{q}, q\neq 0$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

$1=\frac{p}{q}$**, जहाँ पर** p = q = **पूर्णांक तथा** p = q ≠ 0

1 एक के प्रगुण :

गुणा का तत्मसक अवयव

हम जानते हैं कि किसी भी पूर्णांक को१ से गुणा करने पर गुणनफल वही पूर्णांक होता है। जैसे, (-9) × 1 = (-9) = 1 × (-9)

उदाहरण : निम्नांकित को सरल करके परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए।

(i) $\left(\frac{5}{-7}\right)\times 1$ (ii) $\left(\frac{-6}{-1}\right)\times 1$ (iii) $1\times(-5)$ (iv) 1×0

हल: (i) $\left(\frac{5}{-7}\right)\times 1=\left(\frac{5}{-7}\right)\times\frac{1}{1}=\frac{5\times 1}{(-7)\times 1}=\left(\frac{5}{-7}\right)$

(ii) $\left(\frac{-6}{-1}\right)\times 1=\left(\frac{-6}{-1}\right)\times\frac{1}{1}=\frac{(-6)\times 1}{(-1)\times 1}=\left(\frac{-6}{-1}\right)$

(iii) $1\times(-5)=\frac{1}{1}\times\left(\frac{-5}{1}\right)=\frac{1\times(-5)}{1\times 1}=\left(\frac{-5}{1}\right)=(-5)$

(iv) $1\times 0=\frac{1}{1}\times\frac{0}{1}=\frac{1\times 0}{1\times 1}=\frac{0}{1}=0$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित को हल करके परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए :

(i) $\left(\frac{-3}{4}\right)\times 1$ (ii) $1\times\left(\frac{-8}{-9}\right)$

(iii) $(-6)\times 1$ (iv) $\left(\frac{1}{-2}\right)\times 1$

इस प्रकार हम देखते हैं कि :

किसी परिमेय संख्या में १ से गुणा करें अथवा १ में उस परिमेय संख्या से गुणा करें तो गुणनफल में वही परिमेय संख्या प्राप्त होती हैं ।अर्थात्

याfद $\frac{p}{q}$ **कोई परिमेय संख्या हो, तो** $\frac{p}{q}\times 1=\frac{p}{q}=1\times\frac{p}{q}$

इसी प्रगुण के कारण १ कोपरिमेय संख्याओं के गुणा का तत्समक अवयव (घ्रूग्ूब् ातसहू)' कहते हैं।

परिमेय संख्या का प्रतिलोम :

१. किसी परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम

हम जानते हैं कि प्रत्येक पूर्णांक के लिए एक ऐसा पूर्णांक होता है जिसे दिए गए पूर्णांक में जोड़ने पर योगफल शून्य होता है।

जैसे, (–१२) के लिए पूर्णांक १२ ऐसा है कि $(-12)\pm 12=0$

क्या पूर्णाकों का यह प्रगुण परिमेय संख्याओं के लिए भी सत्य है ?

उदाहरण : निम्नांकित कोजोड़िए :

(i) $\frac{3}{5}$ में $\left(\frac{-3}{5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)$ में $\frac{4}{7}$

हल: (i) $\frac{3}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{3+(-3)}{5}=\frac{3-3}{5}=\frac{0}{5}=0$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)+\frac{4}{7}=\frac{(-4)+4}{7}=\frac{-4+4}{7}=\frac{0}{7}=0$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित को सरल कीजिए :

(i) $\left(\frac{-6}{1}\right)+\frac{6}{1}$ (ii) $\frac{8}{5}+\left(\frac{-8}{5}\right)$

$\frac{3}{5}$ का योगात्मक प्रतिलोम $=\left(\frac{-3}{5}\right)$, क्योंकि $\frac{3}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)=0$

तथा $\left(\frac{-4}{7}\right)$ का योगात्मक प्रतिलोम $=-\left(\frac{-4}{7}\right)=\frac{4}{7}$, क्योंकि $\left(\frac{-4}{7}\right)+\frac{4}{7}=0$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं के योगात्मक प्रतिलोम बताइए :

(i) $\left(\frac{-6}{1}\right)$ (ii) $\frac{8}{5}$

परिमेय संख्र्या x का योगात्मक प्रतिलोम=-xक्योंकि x + (-x) =0, अर्थात्

यafo $\frac{p}{q}$ कोई परिमेय संख्या है, तो $\frac{p}{q}$ keâe यaसieelcekeâ Øeefleueeesce $=-\frac{p}{q}$, तथा $\left(-\frac{p}{q}\right)$ keâe यaसieelcekeâ Øeefleueeesce $=-\left(-\frac{p}{q}\right)=\frac{p}{q}$

heefjcesÙe mebKया kesâ **यaसieelcekeâ Øeefleueeesce** (Additive Inverse) **कोheefjcesÙe mebKया keâe $e+Ceelcekeâ** (Negative) **या efJehejerle** (Opposite) Yeer keânles nQ~

2. heefjcesÙe mebKया keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce :

यafo oes heefjcesÙe mebKयाDeeW keâe iegCeveheâue 1 nes, तो Gveमें mes ØelÙeskeâ otmejs keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce keânueelee nw~

उदाहरण : mejue keâerefpeS :

(i) $(-5)\times\left(\frac{1}{-5}\right)$ (ii) $\left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{8}{-5}\right)$

हल: (i) $(-5)\times\left(\frac{1}{-5}\right)=\left(\frac{-5}{1}\right)\times\left(\frac{1}{-5}\right)=\frac{(-5)\times 1}{1\times(-5)}=\left(\frac{-5}{-5}\right)=1$

(ii) $\left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{8}{-5}\right)=\frac{(-5)\times 8}{8\times(-5)}=\left(\frac{-40}{-40}\right)=1$

✍ ØeयाIme keâerefpeS :

efvecveebefkeâle कोmejue keâerefpeS :

(i) $\left(\frac{-4}{9}\right)\times\left(\frac{9}{-4}\right)$ (ii) $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}$ (iii) $\left(\frac{-1}{-5}\right)\times\left(\frac{-5}{-1}\right)$

(–5) keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $=\left(\frac{1}{-5}\right)$, keäयाWefkeâ $(-5)\times\left(\frac{1}{-5}\right)=1$

$\left(\frac{-5}{8}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $=\left(\frac{8}{-5}\right)$, keäयाWefkeâ $\left(\frac{-5}{8}\right)\times\left(\frac{8}{-5}\right)=1$

$\left(\frac{-2}{-7}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $=\left(\frac{-7}{-2}\right)$, keäयाWefkeâ $\left(\frac{-2}{-7}\right)\times\left(\frac{-7}{-2}\right)=1$

✍ Øeयाme keâerefpeS :

efvecveebefkeâle heeefjcesÙe mebKयाDeeW kesâ iegCeelcekeâ Øeefleueesce yeleeFS :

(i) $\left(\frac{-4}{9}\right)$ (ii) $\frac{2}{3}$ (iii) $\left(\frac{-1}{-5}\right)$

Fme Øekeâej nce osKeles nQ efkeâ,

heeefjcesÙe mebKया x keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $\frac{1}{x}, x \neq 0$ keäयाWefkeâ $x\times\frac{1}{x}=1$; Oयाve oW, MetvÙe '0' keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce veneR neslee nw keäयाWefkeâ keâesF& heeefjcesÙe mebKया x mebYeJe veneR nw efpemekesâ efueS $0 \cdot x = 1$ DeLee&led

> **याfo $\frac{p}{q}$ keâesF& heeefjcesÙe mebKया nw, तो $\frac{p}{q}$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $\frac{q}{p}$ nw, keäयाWefkeâ**
> $\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}=1\quad p\neq 0\quad q\neq 0$

heeefjcesÙe mebKया kesâ **iegCeelcekeâ Øeefleueesce** (Multiplicative Inverse) **कोheeefjcesÙe mebKया keâe JÙegl›eâce** (Reciprocal) Yeer keânles nQ~

heeefjcesÙe mebKया x kesâ iegCeelcekeâ Øeefleueesce $\frac{1}{x}$ keâes x^{-1} Yeer efueKeles nQ~

अतŠ 5 keâe iegCeelcekeâ Øeefleueesce $5^{-1}=\frac{1}{5}$,

$\frac{2}{7}$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $=\left(\frac{2}{7}\right)^{-1}=\frac{7}{2}$

तथा $\left(\frac{-5}{8}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $\left(\frac{-5}{8}\right)^{-1}=\left(\frac{8}{-5}\right)=\left(\frac{-8}{5}\right)$

✍ ØeयाIme keâerefpeS :

efvecveebefkeâle kesâ iegCeelcekeâ Øeefleueeesce yeleeFS :

(i) (–4) (ii) $\frac{6}{7}$ (iii) $\left(\frac{8}{-9}\right)$

ध्यान दीजिए कि :

१ का गुणात्मक प्रतिलोम १ है क्योंकि १ × १ ृ १ तथा (–१) का गुणात्मक प्रतिलोम (–१) है क्योंकि (–१) × (–१) ृ१

इस प्रकार

kesâJeue 1 और –1 ही ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं जो स्वयं ही अपना गुणात्मक प्रतिलोम भी हैं।

अभ्यास १ (f)

१. निम्नांकित कथनों के सम्मुख सत्य या असत्य जो सही हो लिखिए :

(i) $\left[\left(\frac{-6}{7}\right)+\frac{6}{7}\right]$ परिमेय संख्या नहीं है।

(ii)परिमेय संख्याओं में योग का तत्समक अवयव शून्य है।

(गग) परिमेय संख्या शून्य '०' का योगात्मक प्रतिलोम नहीं होता है।

(ग्र) किसी ऋणात्मक परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम एक धनात्मक परिमेय संख्या होती है।

(न) परिमेय संख्याओं में घटाने का तत्समक अवयव शून्य है।

(नग) परिमेय संख्याओं में गुणा का तत्समक अवयव १ है।

(नगग) एक ऋणात्मक परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम एक ऋणात्मक परिमेय संख्या होती है।

(नगग) याfद परिमेय संख्र्या े का योगात्मक प्रतिलोर्म े है र्तो े ृ ०

२. निम्नांकित कोअपनी अभ्यास पुस्तिका पर उतार कर रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए :

(i) $\left(\frac{-5}{2}\right)+....=\left(\frac{-5}{2}\right)$ (ii) $\left(\frac{-4}{5}\right)-....=0$

(iii) $\left(\frac{1}{-2}\right)^{-1}=...$ (iv) $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)\times\frac{3}{4}\right]^{-1}=...$

3. ØelÙeskeâ efmLeefle में x keâe ceeve yeleeFS :

(i) $\frac{2}{3}\times x=1$ (ii) $\left(\frac{-3}{4}\right)+x=0$ (iii) $x\times\left(\frac{-5}{4}\right)=1$

(iv) $x\times\left(\frac{-6}{-7}\right)=1$ (v) $\left(\frac{-5}{4}\right)\times\left(\frac{4}{-5}\right)=x$ (vi) $\left(\frac{-7}{6}\right)+\frac{7}{6}=x$

4. efvecveebefkeâle heefjcesÙe mebKयाDeeW kesâ यासieelcekeâ Øeefleueeesce yeleeFS :

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)$ (iii) 0 (iv) $\left(\frac{-4}{-7}\right)$

5. efvecveebefkeâle heefjcesÙe mebKयाDeeW kesâ iegCeelcekeâ Øeefleueeesce %eele keâerefpeS :

(i) $\frac{8}{3}$ (ii) $\left(\frac{-6}{9}\right)$ (iii) $\left(\frac{7}{-6}\right)$

(iv) –9 (v) 17 (vi) $\frac{2}{5}\times\frac{9}{4}$

6. mejue keâerefpeS :

$\frac{3}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{3+(-3)}{5}=\frac{3-3}{5}=\frac{0}{5}=0$

1.2.6 heefjcesÙe mebKयाDeeW keâe Yeeie

efvecveebefkeâle उदाहरणeW कोmeceeefPeS :

उदाहरण 1: $\frac{3}{5}$ में $\left(\frac{-2}{7}\right)$ mes Yeeie oerefpeS ~

हल: $\frac{3}{5}\div\left(\frac{-2}{7}\right) = \frac{3}{5}\times\left(\frac{7}{-2}\right)$ { Yeepekeâ $\left(\frac{-2}{7}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $=\left(\frac{7}{-2}\right)$ }

$=\frac{3\times7}{5\times(-2)}$

$=\frac{21}{-10}$

$=\frac{-21}{10}$

उदाहरण 2: mejue keâerefpeS :

(i) $\left(\frac{-4}{9}\right)\div\left(\frac{-4}{9}\right)$ (ii) $\left(\frac{1}{-6}\right)\div(-1)$

हल: (i) $\left(\frac{-4}{9}\right)\div\left(\frac{-4}{9}\right)$

$\cdot\left(\frac{-4}{9}\right)\times\left(\frac{9}{-4}\right)$ (Yeepekeâ $\left(\frac{-4}{9}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $=\left(\frac{9}{-4}\right)$)

$=\frac{(-4)\times9}{9\times(-4)}=\frac{-36}{-36}=1$

(ii) $\left(\frac{1}{-6}\right)\div(-1)$

$=\left(\frac{1}{-6}\right)\div\left(\frac{-1}{1}\right)$

$=\left(\frac{1}{-6}\right)\times\left(\frac{1}{-1}\right)$ (Yeepekeâ $\left(\frac{-1}{1}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $\left(\frac{1}{-1}\right)$)

$= \frac{1\times 1}{(-6)\times(-1)} = \frac{1}{6}$

✍ ØeयाIme keâerefpeS :

efvecveebefkeâle कोImejue keâerefpeS :

(i) $\left(\frac{-7}{2}\right) \div \left(\frac{-2}{3}\right)$ (ii) $\left(\frac{-6}{5}\right) \div \frac{6}{5}$ (iii) $\left(\frac{8}{-5}\right) \div 1$

Fme Øekeâej nce osKeles nQ efkeâ :

Skeâ heefjcesÙe mebKया कोIotmejer MetvÙeslej heefjcesÙe mebKया mes Yeeie keâjves में henueer heefjcesÙe mebKया में otmejer heefjcesÙe mebKया (Yeepekeâ) kesâ iegCeelcekeâ Øeefleueeesce mes iegCee keâj efoया peelee हैं IDeLee&led

याIfo $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$, oes heefjcesÙe mebKयाISB neW, तो $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \times \frac{s}{r} = \frac{p}{q}$

उदाहरण : oes heefjcesÙe mebKयाIDeeW keâe iegCeveheâue $\left(\frac{-8}{5}\right)$ nw, याIfo Fveमें mes Skeâ mebKया $\left(\frac{-6}{7}\right)$ nw, तो otmejer mebKया %eele keâerefpeS~

हल: otmejer mebKया Øeehle keâjves kesâ efueS $\left(\frac{-8}{5}\right)$ keâes $\left(\frac{-6}{7}\right)$ mes Yeeie osvee nesiee~

otmejer mebKया $= \left(\frac{-8}{5}\right) \div \left(\frac{-6}{7}\right)$

$= \left(\frac{-8}{5}\right) \times \left(\frac{7}{-6}\right)$ (Yeepekeâ $\left(\frac{-6}{7}\right)$ keâe iegCeelcekeâ Øeefleueeesce $= \left(\frac{7}{-6}\right)$)

$= \frac{-6}{-0}$

$= \frac{2}{5}$

GheÙeg&òeâ उदाहरणeW mes efvecveebefkeâle leLÙe Oयाve osves याIsiÙe nQ :

1. **याIfo x और y oes heefjcesÙe mebKयाISB nQ, $y \neq 0$, तो x ÷ y Skeâ heefjcesÙe mebKया nesleer nw~**
2. **याIfo x keâesF& heefjcesÙe mebKया nw, तो x ÷ 1 = x, x ÷ (–1) = –x**
3. **ØelÙeskeâ MetvÙeslej heefjcesÙe mebKया x kesâ efueS, x ÷ x = 1, x ÷ (–x) = –1, (–x) ÷ x = –**

1

अभ्यास 1 (g)

1. efvecveebefkeâle ÙegiceeW में mes ØeLece mebKया में otmejer mebKया mes Yeeie oerefpeS~

(i) $\left(\frac{-8}{5}\right),\left(\frac{1}{-0}\right)$ (ii) $8,\left(\frac{-2}{7}\right)$ (iii) $(-8)\left(\frac{5}{-6}\right)$

(iv) $\left(\frac{5}{-4}\right),\left(\frac{-3}{7}\right)$ (v) $\frac{5}{2},\left(\frac{-4}{9}\right)$ (vi) $\frac{3}{4},(-9)$

2. Yeeie keâer ef›eâया keâjkesâ yeleeFS efkeâ efvecveebefkeâle keâLeve सत्य nw या असत्य :

(i) $\left(\frac{-1}{8}\right)\div\frac{3}{4}$ Skeâ heeefjcesÙe mebKया nw~ (ii) $\left(\frac{8}{-9}\right)\div\left(\frac{-4}{3}\right)=\left(\frac{-4}{3}\right)\div\left(\frac{8}{-9}\right)$

(iii) $\left(\frac{-5}{6}\right)\div 1=1\div\left(\frac{-5}{6}\right)$ (iv) $\left(\frac{-9}{0}\right)\div\left(\frac{-9}{0}\right)=1$

3. mejue keâerefpeS :

(i) $\frac{2}{3}\div\left(\frac{-4}{5}\right)$ (ii) $(-4)\div\left(\frac{-3}{5}\right)$ (iii) $\left(\frac{-6}{7}\right)\div(-5)$

(iv) $\left(\frac{-1}{8}\right)\div\frac{3}{4}$ (v) $\frac{5}{7}\div\left(\frac{-5}{7}\right)$ (vi) $\left(\frac{-7}{2}\right)\div\left(\frac{-2}{3}\right)$

4. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\left(\frac{-6}{7}\right)$ है, यादि इनमें से एक संख्या $\left(\frac{-8}{5}\right)$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

5. दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\left(\frac{-5}{6}\right)$ है, यादि इनमें से एक संख्या $\left(\frac{-7}{2}\right)$ है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

6. $\left(\frac{-4}{9}\right)$ कोकिस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल(–1) प्राप्त हो ?

7. $\frac{8}{9}$ को किस संख्या से गुणा करें कि गुणनफल $\left(\frac{-6}{8}\right)$ प्राप्त हो ?

दक्षता अभ्यास - १(A)

१. निम्नांकित कोसरल करके परिमेय संख्या प्राप्त कीजिए :

(i) $\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{4}{5}\right)-\frac{6}{7}$ (ii) $\left[\left(\frac{2}{-3}\right)+\frac{1}{4}\right]\div 2$

(iii) $\left[\left(\frac{-3}{5}\right)\times\left(\frac{5}{-2}\right)\right]\div\frac{1}{4}$ (iv) $\left[\left(\frac{-5}{9}\right)-\left(\frac{1}{-3}\right)\right]\times\frac{5}{2}$

2. $\left(\frac{-2}{7}\right)$ और $\frac{3}{5}$ के योगफल में उनके अन्तर से गुणा कीजिए ।

3. $\left(\frac{1}{-2}\right)$ और $\left(\frac{-3}{7}\right)$ के योगफल में उनके गुणनफल से भाग दीजिए।

4. अपनी अभ्यास पुस्तिका में निम्नांकित कथनों के आगे सत्य/असत्य अंकित कीजिए :

(i) $\frac{1}{a}$ का गुणात्मक प्रतिलोम a है, याfद $a \neq 0$~

(ii) ऋणात्मक परिमेय संख्या का योगात्मक प्रतिलोम, धनात्मक परिमेय संख्या नहीं होता है।

(ग्ग्) १ कोशून्य से भाग देना संभव नहीं है।

(ग्र्) शून्य किसी परिमेय संख्या का गुणात्मक प्रतिलोम नहीं है।

१.३ परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान

हम जानते हैं कि किसी पूर्णांक का निरपेक्ष मान उस पूर्णांक का संख्यात्मक मान होता हैं ।यह पूर्णांक चिह्न (±) अथवा (–) से निरपेक्ष होता हैं ।जैसे,

+5 का निरपेक्ष मान $= |+5| = 5$

–5 का निरपेक्ष मान $= |-5| = -(-5) = 5$

0 का निरपेक्ष मान $= |0| = 0$

इस प्रकार्र x कोई पूर्णांक है, र्तो x के निरपेक्ष मान र्को | x | से निरूपित किया जाता है और

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{यदि } x > 0 \\ 0, & \text{यदि } x = 0 \\ -x, & \text{यदि } x < 0 \end{cases}$$

पूर्णांकों के निरपेक्ष मान की भाँति परिमेय संख्याओं का निरपेक्ष मान भी (+) अथवा (–) चिह्न से निरपेक्ष होता है।

$\frac{5}{7}$ का निरपेक्ष मान $= \left|\frac{5}{7}\right| = \frac{5}{7}$

$\frac{-5}{7}$ का निरपेक्ष मान $= \left|\frac{-5}{7}\right| = -\left(\frac{-5}{7}\right) = \frac{5}{7}$

उपर्युक्त उदाहरण से हम देखते हैं कि :

(१) किसी भी परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान कभी भी ऋणात्मक नहीं होता है।

(२) प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान सदैव धनात्मक होता है।

(३) परिमेय संख्या शून्य का निरपेक्ष मान शून्य होता है।

उदाहरण 1:निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\left|\frac{3}{7}\right|$ (ii) $\left|\frac{-5}{2}\right|$

(iii) $\left|\frac{-2}{-7}\right|$ (iv) | 0 |

हल: परिमेय संख्या के निरपेक्ष मान की परिभाषा का अनुप्रयोग करके हम मान ज्ञात कर सकते हैं।

(i) $\left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$ (ii) $\left|\frac{-5}{2}\right| = \frac{5}{2}$ (iii) $\left|\frac{-2}{-7}\right| = \left|\frac{2}{7}\right| = \frac{2}{7}$ (iv) $|0| = 0$

प्रयास कीजिए :

(i) $\left|\frac{3}{-8}\right|$ (ii) $\left|-\left(\frac{-7}{3}\right)\right|$

उदाहरण 2: सविता ने $x = \frac{-4}{5}$ और $y = \frac{3}{7}$ सविता ने लेकर निम्नांकित सम्बन्धों के लिए निरपेक्ष मान प्रमाणित किये।

(i) $|x+y| \le |x| + |y|$

(ii) $|x \times y| = |x| \times |y|$

(iii) $|x \div y| = |x| \div |y|$

हल: (i) $x + y = \frac{-4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{-28 + 15}{35} = \frac{-13}{35}$

$\therefore$ $|x+y| = \left|\frac{-13}{35}\right| = \frac{13}{35}$

और $|x| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5}$

$|y| = \left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

$\therefore$ $|x| + |y| = \frac{4}{5} + \frac{3}{7} = \frac{28 + 15}{35} = \frac{43}{35}$

... $\frac{13}{35} < \frac{43}{35}$

$\therefore$ $|x+y| < |x| + |y|$

(ii) $x \times y = \frac{-4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{-4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{-12}{35}$

$\therefore$ $|x \times y| = \left|\frac{-12}{35}\right| = \frac{12}{35}$ ... (i)

और $|x| = \left|\frac{-4}{5}\right| = \frac{4}{5}, |y| = \left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

$\therefore$ $|x| \times |y| = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{4 \times 3}{5 \times 7} = \frac{12}{35}$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से :

$|x \times y| = |x| \times |y|$

(iii) $x = \frac{-4}{5}, y = \frac{3}{7}$

$|x| = \left|\frac{-4}{5}\right| = -\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{4}{5}$

$|y| = \left|\frac{3}{7}\right| = \frac{3}{7}$

$|x| \div |y| = \frac{4}{5} \div \frac{3}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{7}{3} = \frac{28}{15}$ ... (i)

$|x \div y| = \left|\frac{-4}{5} \div \frac{3}{7}\right|$

$= \left|\frac{-4}{5} \times \frac{7}{3}\right| = \left|\frac{-28}{15}\right| = -\left(\frac{-28}{15}\right) = \frac{28}{15}$ ... (ii)

समीकरण (i) और (ii) से :

$|x \div y| = |x| \div |y|$

उदाहरण ३: निरपेक्ष मान $\frac{3}{4}$ वाली संख्या की संगत परिमेय संख्या ज्ञात करें।

हल: प्रथम विधि : अमित ने निरपेक्ष मान $\frac{3}{4}$ वाली संख्या का परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए एक संख्या रेखा खींची। संख्या रेखा पर बिन्दु A और B इस प्रकार अंकित किया जो बिन्दु 0 से $\frac{3}{4}$ दूरी पर स्थित हों।

संख्या रेखा पर 0 से दाया R ओर $\frac{3}{4}$ दूरी पर बिन्दु A और 0 से बाया R ओर $\frac{3}{4}$ दूरी पर बिन्दु B है। $\frac{+3}{4}$ बिन्दु A और $\frac{-3}{4}$ बिन्दु B को व्यक्त करते हैं।

$\frac{3}{4}$ का निरपेक्ष मान $=\left|+\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$

$-\frac{3}{4}$ का निरपेक्ष मान $=\left|-\frac{3}{4}\right|=-\left(\frac{-3}{4}\right)=\frac{3}{4}$

अत: $+\frac{3}{4}$ और $-\frac{3}{4}$ दोनों परिमेय संख्याओं के निरपेक्ष मान $\frac{3}{4}$ हैं।

द्वितीय विधि : इसे रजिया ने निम्नांकित विधि से हल करके समान उत्तर प्राप्त किया।

हल: माना वह संख्र्या x है :

$|x|=\frac{3}{4}$

x का मान शून्य नहीं हो सकता,

याfo $x > 0$, तो $x=\frac{3}{4}$

याfo $x < 0$, $-x=\frac{3}{4}$

अर्थात् $x=-\frac{3}{4}$

इस प्रकार आपने देखा कि $\frac{3}{4}$ और $-\frac{3}{4}$ ऐसी दो परिमेय संख्याएँ हैं, जिनके निरपेक्ष मान $\frac{3}{4}$ हैं :

१. प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या r के लिए केवल दो परिमेय संख्याएँ ऐसी होती हैं, जिनमें प्रत्येक का निरपेक्ष मान r होता है।

२. शून्य का निरपेक्ष मान शून्य होता है।

३. प्रत्येक परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान धनात्मक होता है।

अभ्यास १ (h)

१. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के निरपेक्ष मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{-1}{8}$ (iii) $\frac{-9}{-2}$ (iv) $\frac{-8}{9}$

2. सरल कीजिए :

(i) $\left|\frac{3}{5}-\frac{2}{3}\right|$ (ii) $\left|\frac{-9}{7}+\frac{1}{3}\right|$ (iii) $\left|\frac{-3}{5}\times\frac{-7}{1}\right|$

उत्तर का सही विकल्प अपनी अभ्यास पुस्तिका में लिखिए :

3. याfo $x=-\frac{1}{2}$ और $y=\frac{3}{4}$ तो $|x|+|y|$ का मान है :

(i) $\frac{7}{4}$ (ii) $-\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $\frac{7}{8}$

4. $\left|-\left(\frac{3}{-7}\right)\right|$ का मान है :

(i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{-3}{7}$ (iii) $\frac{3}{-7}$ (iv) $\frac{-3}{-7}$

5. याfo $x=\frac{-5}{7}$ और $y=\frac{3}{4}$ तो $|x|\times|y|$ का मान है :

(i) $\frac{7}{8}$ (ii) $-\frac{5}{8}$ (iii) $\frac{5}{4}$ (iv) $\frac{5}{8}$

6. परिमेय संख्याओं $\frac{-5}{7}$ और $\frac{-5}{-7}$ के निरपेक्ष मान हैं :

(i) $\frac{-5}{7}$ (ii) $\frac{5}{-7}$ (iii) $\frac{5}{7}$ (iv) $\frac{7}{5}$

7. अपनी अभ्यास पुस्तिका में उतारकर प्रत्येक वर्ग में उपयुक्त चिह्न >, =, < } लगाइए :

(i) $\left|-\frac{3}{4}\right|$ $\square$ $\left|-\frac{3}{4}+\frac{5}{8}\right|$ (ii) $\left|-\frac{3}{8}+\frac{2}{3}\right|$ $\square$ $\left|\frac{-3}{4}+\frac{2}{4}\right|$

(iii) $\left|-\left(-\frac{2}{3}\right)\right|$ $\square$ $\left|-\frac{2}{5}\right|\times\left|-\left(\frac{-6}{5}\right)\right|$ (iv) $\left|-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\right|$ $\square$ $\left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right|$

8. याfo $x=\frac{5}{9}$, $y=\frac{2}{3}$ तो दिखाइए कि :

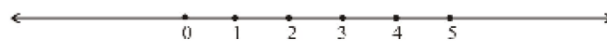
(i) $|x+y|=|x|+|y|$ (ii) $|x\times y|=|x|\times|y|$

9. याfo $x=\frac{5}{3}$, $y=\frac{-2}{1}$ तो दिखाइए कि :

(i) $|x+y|<|x|+|y|$ (ii) $|x\times y|=|x|\times|y|$

10. ऐसी दो परिमेय संख्याओं कोज्ञात कीजिए जिनका निरपेक्ष मान $\frac{1}{2}$ है।

१.4 दो विभिन्न परिमेय संख्याओं के मध्य परिमेय संख्याओं का समावेशन

संख्या रेखा पर किन्हीं दो पूर्णांकों के मध्य सदैव किसी अन्य पूर्णांक का होना आवश्यक नहीं हैं ।निम्नांकित संख्या रेखा कोध्यान से देखिए :

संख्या रेखा पर ० और ५ के मध्य १, २, ३ और 4 केवल चार पूर्णांक हैं। परन्तु ० और १ के मध्य कोई पूर्णांक नहीं है।

इसके विपरीत किन्हीं दो विभिन्न परिमेय संख्याओं के मध्य अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

आइए देखते हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच में अनेक परिमेय संख्याएँ किस प्रकार निकाली जा सकती हैं। रश्मि कोयह ज्ञात है कि ५ और १० के बीच 4 पूर्ण संख्याएँ होती हैं। इसी प्रकार वह -३ और ३ के बीच पूर्णां कोकी संख्या ज्ञात करना चाहती थी। रश्मि ने -३ और ३ के बीच में पूर्णांक लिखे -३, -२, -१, ०, १, २, ३

इस प्रकार रश्मि को-३ और ३ के बीच ५ पूर्णांक प्राप्त हो गये।

आप देखते हैं कि -३ और -२ के बीच कोई पूर्णांक नहीं है। दो क्रमागत पूर्णांकों के बीच कोई पूर्णांक नही होता है ।
स्पष्ट है कि दो पूर्णांकों के बीच में पूर्णांकों की संख्या सीमित (परिमित) होती है।
आप देख सकते हैं कि दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ होती हैं।

रश्मि ने दो परिमेय संख्याएँ $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-1}{5}$ ली और इन्हें समान हर वाली संख्याओं में बदल लिया

$\frac{-2}{3} = \frac{-0}{5}$ और $\frac{-1}{5} = \frac{-3}{5}$

परिमेय संख्याओं $\frac{-0}{5}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच में रश्मि कोनिम्नलिखित प्रकार की संख्याएँ प्राप्त हु◌ँइं :

$\frac{-0}{5} \quad \frac{-9}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-6}{5} < \frac{-5}{5} < \frac{-4}{5} \quad \frac{-3}{5}$

या $\frac{-2}{3} \quad \frac{-3}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{3} < \frac{-4}{5} \quad \frac{-1}{5}$

अतŠ $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-1}{5}$ के बीच में परिमेय संख्याएँ $\frac{-3}{5} < \frac{-8}{5} < \frac{-7}{5} < \frac{-2}{5} < \frac{-1}{3} < \frac{-4}{5}$ हैं।
आइए देखते हैं कि,

क्या $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-1}{5}$ के बीच में केवल उपर्युक्त ६ परिमेय संख्याएँ ही हैं?

अब $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के बीच अन्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं।

$\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{5}$ के समतुल्य परिमेय संख्याएँ निम्नलिखित हैं :

$\frac{-0}{0}$ आैर $\frac{-8}{0}$

साथ ही $\frac{-0}{0} < \frac{-9}{0} < \frac{-8}{0}$

अर्थात $\frac{-2}{3} < \frac{-9}{0} < \frac{-3}{5}$

इस प्रकार $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-1}{5}$ के बीच हमने एक और परिमेय संख्या ज्ञात कर ली है।
इस विधि का प्रयोग करके, आप दो परिमेय संख्याओं के बीच में जितनी चाहें उतनी परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।

देखिए पुनः $\frac{-2}{3}$ और $\frac{-3}{5}$

$\frac{-3}{5} = \frac{-3 \times 0}{5 \times 0} = \frac{-0}{150}$

और $\frac{-2}{3} = \frac{-2 \times 0}{3 \times 0} = \frac{-100}{150}$

हम समतुल्य संख्याओं $\frac{-0}{150}$ और $\frac{-100}{150}$ के बीच में (अर्थात $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-2}{3}$ वेâ बीच में) ९ परिमेय संख्याएँ $\frac{-9}{150}, \frac{-2}{150}, \frac{-9}{150}, \cdots \frac{-9}{150}$ प्राप्त करते हैं। इस प्रकार यह सूची कभी समाप्त नहीं होगी।
निष्कर्ष :

हम दो परिमेय संख्याओं के बीच में असीमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

दो दी गयाr विभिन्न परिमेय संख्याओं के मध्य एक परिमेय संख्या ज्ञात करना :

उदाहरण १: दिखाइए कि $\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)$ परिमेय संख्याओं $\frac{-1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के मध्य स्थित है।

हल: $\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{-2+3}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

अब हम $\frac{-1}{3},\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{12}$ को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं।

3, 2 और 12 का ल0स0 = 12

$\frac{-1}{3}=\frac{-1\times4}{3\times4}=\frac{-4}{12}$

$\frac{1}{2}=\frac{1\times6}{2\times6}=\frac{6}{12}$

$\frac{1}{12}=\frac{1\times1}{12\times1}=\frac{1}{12}$

यह स्पष्ट है कि $\frac{-4}{12}<\frac{1}{12}<\frac{6}{12}$

या, $\frac{-1}{3}<\frac{1}{12}<\frac{1}{2}$

इससे यह ज्ञात होता है कि $\frac{1}{12}$ अर्थात् $\left\{\frac{1}{2}\times\left(\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right\}$ परिमेय संख्याओं $\frac{-1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के बीच में स्थित है।

उदाहरण २: याfद $x \neq y$ तो दिखाइए कि $\frac{x+y}{2}$ परिमेय संख्याओं x और y के मध्य स्थित है।

हल: दो विभिन्न परिमेय संख्याएँ x और y हैं। इनमें से एक दूसरे से अवश्य बड़ी होगी।

माना $x > y$

दोनों पक्षों में x जोड़ने पर

$x + x > x + y$

या, $2x > x + y$

या, $x > \frac{x+y}{2}$ .... (i)

पुन: $x > y$

दोनों पक्षों में y जोड़ने पर

$x + y > y + y$

या, $x + y > 2y$

या, $\frac{x+y}{2} > y$ .... (ii)

समीकरण (i) और (ii) को संयुक्त करन पर

$$x > \frac{x+y}{2} > y$$

अत: परिमेय संख्याओं x और y के मध्य एक परिमेय संख्या $\frac{x+y}{2}$ है।

उदाहरण ३: $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य परिमेय संख्या :

$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)$

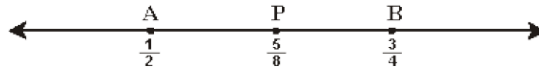
$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{2+3}{4}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{5}{4}$

$= \frac{5}{8}$

इस परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ को संख्या रेखा पर बिन्दु A और बिन्दु B से अंकित कीजिए।

A P B

$\frac{1}{2}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$

अब दोनों के मध्य ज्ञात की गयाr परिमेय संख्या $\frac{5}{8}$ कोबिन्दु झ् से निरूपित किया गया।

इस प्रक्रिया का प्रयोग करके $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के मध्य अन्य परिमेय संख्याएँ प्राप्त की जा सकती है।

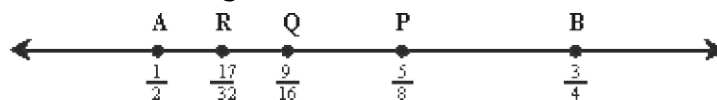
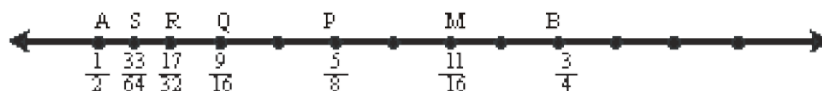
जैसे, $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के मध्य परिमेय संख्या $= \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\left(\frac{4+5}{8}\right)$

$= \frac{1}{2}\times\frac{9}{8} = \frac{9}{6}$

$\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के बीच परिमेय संख्या $\frac{9}{6}$ को ें से निरूपित किया गया, पुनः $\frac{1}{2}$ और $\frac{9}{6}$ के बीच परिमेय संख्या $\frac{7}{3}$ को बिन्दु R से अंकित किया गया।

A R Q P B

$\frac{1}{2}$ $\frac{17}{32}$ $\frac{9}{16}$ $\frac{5}{8}$ $\frac{3}{4}$

इस प्रकार $\frac{7}{32}$ परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{9}{6}$ के मध्य है और $\frac{3}{6}$ परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{7}{32}$ के मध्य हैं ।इस प्रक्रिया का प्रयोग करते हुए $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य अनेक परिमेय संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

उपर्युक्त संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं $\frac{1}{2}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य केवल पाँच परिमेय संख्याएँ अंकित हैं। वास्तव में इनके बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ हैं।

जिस प्रकार $\frac{1}{2}$ और $\frac{5}{8}$ के मध्य परिमेय संख्या $\frac{9}{16}$ प्राप्त की गयाr, उसी प्रकार $\frac{5}{8}$ और $\frac{3}{4}$ के मध्य परिमेय संख्या $\frac{1}{2}\left(\frac{5}{8}+\frac{3}{4}\right)=\frac{11}{16}$ भी प्राप्त किया गया। इसे संख्या रेखा पर बिन्दु श् पर अंकित किया।

इस प्रकार हम देखते हैं कि,

यार्दि x और y दो भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$q_1=\frac{1}{2}(x+y)$; $q_2=\frac{1}{2}(q_1+y)$; $q_3=\frac{1}{2}(q_2+y)$... **आर्दि x और y के मध्य होंगी। अत: दो भिन्न परिमेय संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं।**

उदाहरण 4: $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ के बीच चार परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: मान लिया कि $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ के मध्य चार परिमेय संख्याएँ क्रमश: q1, q2, q3 और q4 हैं।

$$q_1=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+2}{6}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{12}$$

$$q_2=\frac{1}{2}\left(q_1+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{12}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{12}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{7}{12}=\frac{7}{24}$$

$$q_3=\frac{1}{2}\left(q_2+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7}{24}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{7+8}{24}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{15}{24}=\frac{15}{48}$$

$$q_4=\frac{1}{2}\left(q_3+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{15}{48}+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{15+16}{48}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{31}{48}=\frac{31}{96}$$

अत: $\frac{1}{6}$ और $\frac{1}{3}$ के मध्य चार परिमेय संख्याएँ

$\frac{3}{12},\frac{7}{24},\frac{15}{48}$ और $\frac{31}{96}$ हैं।

या, $\frac{1}{4},\frac{7}{24},\frac{5}{16}$ और $\frac{31}{96}$ हैं।

प्रयास कीजिए :

$\frac{1}{5}$ और $\frac{7}{10}$ के बीच में $\frac{1}{5}$ से चौथाई दूरी पर स्थित परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

अभ्यास 1 (i)

अपनी अभ्यास पुस्तिका में प्रश्न १ और २ में सही विकल्प चुनिए :

1. –1 और $-\frac{1}{2}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या है :

(i) $-\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $-\frac{3}{4}$ (iv) $\frac{3}{4}$

2. – 3 और 4 के ठीक बीच स्थित परिमेय संख्या है :

(i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{-7}{2}$ (iii) $\frac{7}{2}$ (iv) $-\frac{1}{2}$

3. –1 और १ के ठीक बीच की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

4. $\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{2}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{-7}{8}$ और $\frac{7}{8}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

6. $-\frac{3}{5}$ और $\frac{8}{3}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

7. $\frac{-5}{4}$ और $-\frac{1}{6}$ के ठीक मध्य की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

8. $1\frac{3}{4}$ और $4\frac{3}{8}$ के ठीक मध्य की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

9. $-1\frac{2}{7}$ और $\frac{9}{2}$ के ठीक बीच की परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

10. $\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3}+\frac{1}{4}\right)$ को परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए और दिखाइए कि यह परिमेय संख्याओं $\frac{-2}{3}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच स्थित है।

१.५ परिमेय संख्या कोदशमलव संख्या के रूप में व्यक्त करना

हम भिन्नों कोदशमलव में बदलना जानते हैं। भिन्नों की भाँति हम परिमेय संख्या कोभी दशमलव संख्या में बदल सकते हैं।

उदाहरण १: भिन्न $\frac{5}{8}$ और $\frac{7}{1}$ को दशमलव में बदलिए। (सभी भिन्नें परिमेय संख्या होती हैं)

हल: $\frac{5}{8} = 5 \div 8$ $\frac{7}{1} = 7 \div 1$

0.625 0.6363...

8) 5.0 11) 7.0

48 66

20 40

16 33

40 70

40 66

0 40

33

7 क्रमश:

$\therefore \frac{5}{8} = 0.625$ $\therefore \frac{7}{1} = 0.6363...$

हम देखते हैं कि ५ में ८ से भाग की संक्रिया में भाग की प्रक्रिया कुछ परिमित चरणों के बाद समाप्त हो जाती है, जबकि ७ में ११ से भाग देने पर भाग की प्रक्रिया का अन्त नहीं होता है।

(अ) सान्त (अन्त होने वाली) दशमलव संख्या:

उदाहरण २: परिमेय संख्याओं $\frac{3}{4}, \frac{7}{5}$ **और** $\frac{3}{20}$ को दशमलव में बदलिए ।

हल: $\frac{3}{4} = 3 \div 4 \quad \frac{7}{5} = 7 \div 5 \quad \frac{3}{20} = 3 \div 20$

```
   0.75       1.4          0.15
4) 3.0     5) 7.0     20) 3.0
   28         5            20
    20         20           100
    20         20           100
     0          0             0
```

$\frac{3}{4} = 0.75 \quad \frac{7}{5} = 1.4 \quad \frac{3}{20} = 0.15$

उपर्युक्त परिमेय संख्याएँ $\frac{3}{4}, \frac{7}{5}$ और $\frac{3}{20}$ सान्त दशमलव में व्यक्त हो जाती हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं कोदशमलव में बदलिए : $\frac{3}{8}, \frac{7}{20}$ **और** $\frac{1}{5}$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में प्राप्त भागफल सान्त दशमलव हैं। इनके हरों कोध्यान से देखिए :

हम देखते हैं कि इनके हरों के अभाज्य गुणनखंड केवल २ या ५ (या दोनों) हैं।

अत: सान्त दशमलव में व्यक्त होने वाली परिमेय संख्याओं के हरों के अभाज्य गुणनखं्ड केवल २ या ५ (या दोनों) होते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित संख्याओं में से सान्त दशमलव में व्यक्त होने वाली परिमेय संख्याओं कोपहचानिए।

$\frac{1}{4}, \frac{13}{20}, \frac{5}{6}, \frac{15}{16}, \frac{2}{7}, \frac{13}{30}$

(ब) अनन्त आवर्तक (असान्त आवर्ती) दशमलव संख्या:

हमने देखा कि ७ में ११ से भाग देने पर भागफल में अंकों के समूह ६३ बार-बार आते हैं और भाग की प्रक्रिया लगातार चलती रहती हैं ।इस प्रकार प्राप्त भागफल ०.६३६३... असान्त आवर्ती है।

इसी प्रकार के कुछ अन्य उदाहरण लेकर जाँच कीजिए :

उदाहरण. ३ : परिमेय संख्याओं $\frac{1}{3}$ **और** $\frac{2}{11}$ को दशमलव में बदलिए।

हल: $\frac{1}{3} = 1 \div 3 \quad \frac{2}{11} = 2 \div 11$

```
           0.1818
        11) 2.0
            11
  0.333     90
3)1.0       88
  9         20
  10        11
  9         90
  10        88
  9          2  क्रमशः
  1  क्रमशः
```

$\therefore \frac{1}{3} = 0.333...$ $\therefore \frac{2}{1} = 0.1818...$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं को दशमलव में बदलिए :

$$\frac{4}{9}, \frac{1}{7}, \frac{5}{3}$$

उपर्युक्त सभी उदाहरणों में प्राप्त भागफल में एक अंक या अंकों का समूह बार-बार आता है और भाग की प्रक्रिया लगातार चलती रहती है।

अत: ऐसी परिमेय संख्याएँ जिन कोदशमलव में बदलने पर दशमलव भाग में एक अथवा एक से अधिक अंकों के समूह बार-बार आते हैं और भाग की प्रक्रिया कभी समाप्त नहीं होती है, असान्त आवर्ती दशमलव संख्याएँ कहलाती हैं।

असान्त आवर्ती दशमलव संख्या में बार-बार आने वाले अंक के समूह कोव्यक्त करने के लिए उनके ऊपर रेखा (–) या प्रथम और अंतिम अंकों के ऊपर बिन्दु अंकित करते हैं।

जैसे, $\frac{1}{3} = 0.333...$ या $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ या $0.\dot{3}$

$\frac{2}{1} = 0.1818...$ या $\frac{2}{1} = 0.\overline{18}$ या $0.\dot{1}\dot{8}$

$\frac{1}{7} = 0.142857...$ या $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ या $0.\dot{1}4285\dot{7}$

उदाहरण. 4 : $\frac{5}{21}$ को दशमलव में व्यक्त कीजिए ।

हल: $\frac{5}{21} = 5 \div 21$

```
     0.238095...
21) 5.0
    42
     80
     63
     170
     168
      200
      189
       110
       105
         5  क्रमशः
```

$\therefore \frac{5}{21} = 0.\overline{238095}$ या $0.\dot{2}3809\dot{5}$

हमने उपर्युक्त दशमलव संख्या में अंकों के समूह २३८०९५ के ऊपर रेखा क्यों खींची ?

भाग की संक्रिया आरम्भ करते समय भाज्य में अंक ५ से आरम्भ किया था। अब जैसे ही शेष अंक ५ पुन: आया तो हमने जान लिया कि आगे भाग देने पर पहले आये अंक समूह की निरन्तर पुनरावृत्ति होगी।

अंक समूह के निरन्तर पुनरावृत्ति कोदर्शाने के लिए हम २३८०९५ के ऊपर रेखा खींचते हैं, या प्रथम और अन्तिम अंक पर बिन्दु अंकित करते हैं।

असान्त आवर्ती दशमलव भिन्नें दो प्रकार की होती हैं।
(१) शुद्ध असान्त आवर्ती दशमलव संख्या :

ऊपर दिये गये सभी उदाहरण शुद्ध असान्त आवर्ती दशमलव संख्या के हैं।
(२) मिश्रित असान्त आवर्ती दशमलव संख्या :

निम्नांकित उदाहरण कोदेखिए :

उदाहरण. ५ : परिमेय संख्या $\frac{1}{6}$ कोदशमलव में बदलिए।

$$\begin{array}{r|l} & 0.166 \\ 6) & 1.0 \\ & 6 \\ & 40 \\ & 36 \\ & 40 \\ & 36 \\ & 4 \end{array}$$

हल: क्रमशः अत: $\frac{1}{6} = 0.166...$ या $0.1\dot{6}$

इस उदाहरण में दशमलव के तुरन्त बाद अंक १ है, जिसकी पुनरावृत्ति नहीं हो रही हैं ।परन्तु बाद वाला अंक ६, बार-बार आता है। इसे मिश्रित असान्त आवर्ती दशमलव संख्या कहते हैं।

ऋणात्मक परिमेय संख्याओं कोदशमलव संख्या के रूप में व्यक्त करना

हमने धनात्मक परिमेय संख्याओं कोदशमलव रूप में बदलना सीखा हैं ।क्या हम ऋणात्मक परिमेय संख्याओं कोदशमलव संख्या रूप में बदल सकते हैं।

उदाहरण. ६: $-\frac{2}{5}$ को दशमलव संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ।

हल: $\frac{2}{5}$ का दशमलव निरूपण $= \frac{2\times 2}{5\times 2} = \frac{4}{10} = 0.4$

$\therefore -\frac{2}{5}$ का दशमलव निरूपण $= -0.4$

उदाहरण 7: $\frac{-24}{7}$ को दशमलव संख्या में बदलिए।

हल: $\frac{24}{7}$ को दशमलव संख्या में बदलते हैं।

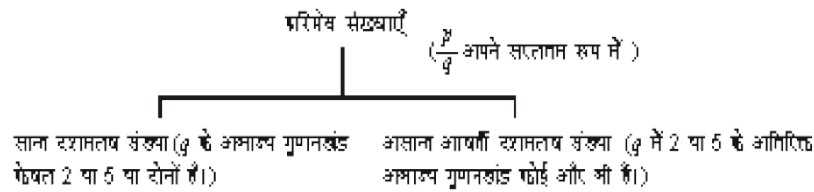
$$\begin{array}{r|l} & 3.428571 \\ 7) & 24 \\ & 21 \\ & 30 \\ & 28 \\ & 20 \\ & 14 \\ & 60 \\ & 56 \\ & 40 \\ & 35 \\ & 50 \\ & 49 \\ & 10 \\ & 7 \\ & 3 \end{array}$$

क्रमशः $\therefore \frac{24}{7} = 3.\overline{428571}$ $\frac{-24}{7} = -3.\overline{428571}$

हम देखते हैं कि परिमेय संख्याओं में कोई भी सान्त दशमलव नहीं होते, याfद उनके सरलतम रूप $\frac{p}{q}$ में q के गुणनखंड २ और ५ के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या भी हो। अत: ये असान्त आवर्ती दशमलव हैं।

परिमेय संख्याओं का वर्गीकरण निम्नांकित प्रकार से किया गया है :

परिमेय संख्याएँ ($\frac{p}{q}$ अपने सरलतम रूप में)

सान्त दशमलव संख्या (q के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 या 5 या दोनों हैं।) | असान्त आवर्ती दशमलव संख्या (q में 2 या 5 के अतिरिक्त अभाज्य गुणनखंड कोई और भी हैं।)

अभ्यास 1 (j)

1. निम्नांकित परिमेय संख्याओं को दशमलव रूप में व्यक्त कीजिए :

$\frac{1}{3}, \frac{7}{5}, \frac{9}{6}, \frac{3}{8}$

2. निम्नांकित संख्याओं कोदशमलव रूप में बदलिए :

$\frac{-5}{4}, \frac{-5}{2}, \frac{-6}{5}, \frac{-5}{9}$

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं में से कौन-कौन सी संख्याओं कोसांत दशमलव में निरूपित किया जा
सकता है?

$\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-7}{4}, \frac{-3}{10}, \frac{2}{7}, \frac{6}{5}$

4. $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$ के योगफल कोयाfद दशमलव संख्या में बदलें तो यह सान्त होगा अथवा असान्त ?

५. निम्नांकित परिमेय संख्याओं में से किस-किस का सान्त दशमलव संख्या में निरूपण नहीं हो सकता ?

$\frac{4}{7}, \frac{5}{6}, \frac{7}{5}, \frac{3}{7}, 5\frac{3}{4}$

6.के योगफल कोयाfद दशमलव संख्या में बदलें तो यह सान्त होगा अथवा असान्त ?

५. निम्नांकित परिमेय संख्याओं में से किस-किस का सान्त दशमलव संख्या में निरूपण नहीं हो सकता ?

(a) $\frac{1}{3}$ का निरूपण एक सान्त दशमलव संख्या में किया जा सकता है। (b) $\frac{1}{9}$ का निरूपण एक सान्त दशमलव संख्या में किया जा सकता है। (c) ०.६ और ०.६०००००००० में कोई अन्तर नहीं है। (d) $\frac{3}{7}$ अपने दशमलव संख्या के रूप में असांत आवर्ती नहीं है। १.६ दशमलव संख्या कोपरिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना

१. सान्त दशमलव संख्या कोपरिमेय संख्या में व्यक्त करना :

दशमलव संकेतन पद्धति के स्थानीय मान की तालिका कोध्यान से देखिए और दशमलव संख्याओं ०.१५, १.५, ०.६२५, १२.०५ और २.१२५ कोपरिमेय संख्याओं में व्यक्त कीजिए।

दशमलव संख्या	सैकड़ा	दहाई	इकाई	दशमलव बिन्दु	दशांश	शतांश	सहस्रांश
	100	10	1	.	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$
		पूर्णांक			दशमलव या भिन्नात्मक भाग		
0.15			0	.	1	5	
1.5			1	.	5		
0.625			0	.	6	2	5
12.05		1	2	.	0	5	
2.125			2	.	1	2	5

हल: (1) 0.15 = 1 दशांश ± ५ शतांश

$= \frac{1}{10} + \frac{5}{100}$

$= \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

(2) 1.5 = 1 इकाई ± ५ दशांश

$= 1 + \frac{5}{10}$

$= 1\frac{5}{10} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

(3) 0.625 = 6 शांश ± २ शतांश ± ५ सहस्रांश

$= \frac{6}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$

$= \frac{600}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000}$

$= \frac{625}{1000} = \frac{5}{8}$

(4) 12.05 = 1 दहाई ± २ इकाई ± ० दशांश ± ५ शतांश

$= 12 + \frac{0}{10} + \frac{5}{100}$

$= 12 + \frac{0}{100} + \frac{5}{100}$

$= 12 + \frac{0+5}{100} = 12 + \frac{5}{100} = \frac{1205}{100} = \frac{241}{20}$

(5) 2.125 = 2 इकाई ± १ दशांश ± २ शतांश ± ५ सहस्रांश

$= 2 + \frac{1}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$

$= 2 + \frac{100}{1000} + \frac{20}{1000} + \frac{5}{1000}$

$= 2 + \frac{125}{1000} = \frac{2125}{1000} = \frac{17}{8}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित दशमलव संख्याओं कोपरिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए। 0.3, 0.016, 1.45

उपर्युक्त सभी उदाहरणों से हम पाते हैं कि :

याfद 0. r **और** 0.r s **दशमलव संख्याएँ हैं, जहाँ r और s अंक हैं, तो उन्हें परिमेय संख्या** $\frac{p}{q}$ **के रूप में बदलने पर इनका मान क्रमश:** $\frac{r}{0}$ **और** $\frac{rs}{100}$ **होता है।**

अभ्यास १ (k)

१.निम्नांकित दशमलव संख्याओं भिन्नों को परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए :

0.35, 0.750, 2.15, 7.010,10.10, 0.015, 1.05, 2.25

2. निम्नांकित दशमलव संख्याओं कोपरिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप में निरूपित कीजिए :

2.25, 10.5, 8.625, 16.375

दक्षता अभ्यास - 1 (B)

1. याfo $x=-\frac{3}{5}, y=-\frac{4}{7}$ तो दिखाइए कि :

(i) $|x \times y| = |x| \times |y|$ (ii) $|x \div y| = |x| \div |y|$

2. उन सभी परिमेय संख्याओं कोज्ञात कीजिए जिनका निरपेक्ष मान $\frac{5}{6}$ है।

३. उस परिमेय संख्या कोज्ञात कीजिए जिसका निरपेक्ष मान शून्य है।

4. निम्नांकित में कौन-कौन सी ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं, जिन्हें सान्त दशमलव संख्या में व्यक्त किया जा सकता है ?

$\frac{1}{8}, 4\frac{3}{5}, \frac{-3}{8}, \frac{4}{7}, \frac{5}{6}$

5. निम्नांकित में किन-किन परिमेय संख्याओं कोअसान्त आवर्ती दशमलव संख्या में निरूपित किया जा सकता है ?

$\frac{5}{7}, \frac{1}{9}, \frac{3}{5}, \frac{7}{6}, \frac{-5}{8}, \frac{-413}{605}$

6. निम्नांकित परिमेय संख्याओं कोसान्त या असान्त दशमलव संख्या में व्यक्त कीजिए :

$\frac{-9}{0}, \frac{-5}{9}, \frac{3}{6}, -2\frac{4}{1}, \frac{-8}{7}$

7. निम्नांकित परिमेय संख्याओं कोभिन्न में बदलिए

(i) 0.015 (ii) 0.84 (iii) 12.625

हमने क्या चर्चा की ?

१. समान हर वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए, उनके अंशों का योग ज्ञात कर हर वही रखा जाता है, जैसे $\frac{p}{q}+\frac{r}{q}=\frac{p+r}{q}$

2. असमान धनात्मक हरों वाली दो परिमेय संख्याओं कोजोड़ने के लिए, पहले दोनों हरों का ल०स० ज्ञात करते हैं और पुन: दोनों परिमेय संख्याओं कोउनके हरों के ल०स० के बराबर हर वाली दो समतुल्य परिमेय संख्याओं में बदल कर योग, क्रमांक-१ की भाँति ज्ञात कर लेते हैं।

३. परिमेय संख्याओं में योग की संक्रिया संवरक, क्रमविनिमेय, साहचर्य प्रगुणों का पालन करती है।

4. एक परिमेय संख्या में से दूसरी परिमेय संख्या कोघटाने के लिए हम घटायाr जाने वाली परिमेय संख्या के योगात्मक प्रतिलोम कोपहली परिमेय संख्या में जोड़ते हैं।

५. परिमेय संख्याओं में घटाने की संक्रिया संवरक प्रगुण कोसंतुष्ट करती है किन्तु क्रम विनिमेय और साहचर्य प्रगुणों का पालन नहीं करती।

६. दो परिमेय संख्याओं का गुणा करने के लिए हम इन संख्याओं के अंशों और हरों का अलग-अलग गुणा करते हैं, जैसे $\frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{p \times r}{q \times s} = \frac{p}{q}$

7. परिमेय संख्याओं में गुणा की संक्रिया संवरक, क्रम-विनिमेय और साहचर्य प्रगुणों का पालन करती है।

८. पूर्णांकों की भाँति ही परिमेय संख्याओं के योग पर गुणन का वितरण प्रगुण लागू होता है।

९. परिमेय संख्याओं में 'शून्य' योग का तत्समक अवयव होता है।

१०. परिमेय संख्याओं में संख्या '१' गुणा का तत्समक अवयव होता है।

11. परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का योगात्मक प्रतिलोम $-\frac{p}{q}$ होता है।

12.किसी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\frac{1}{\left(\frac{p}{q}\right)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{-1} = \frac{q}{p}$ होता हैं । इसे परिमेय संख्या का व्युत्क्रम भी कहते हैं।

13. किसी परिमेय संख्या कोएक अन्य शून्येतर परिमेय संख्या से भाग देने के लिए पहली परिमेय संख्या का दूसरी (शून्येतर) परिमेय संख्या के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं।

१4. किसी भी परिमेय संख्या का निरपेक्ष मान कभी भी ऋणात्मक नहीं होता है।

१५. दो परिमेय संख्याओं के बीच अनन्त परिमेय संख्याएँ होती हैं।

१६. जिन परिमेय संख्याओं के हरों के अभाज्य गुणनखंड केवल २ या ५ या दोनों होते हैं, वे सदैव सान्त

दशमलव में बदली जा सकती हैं।

१७. जिन परिमेय संख्याओं के हरों के गुणनखंड २ और ५ के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य संख्या भी

हो तो वे असान्त आवर्ती दशमलव में बदली जा सकती हैं।

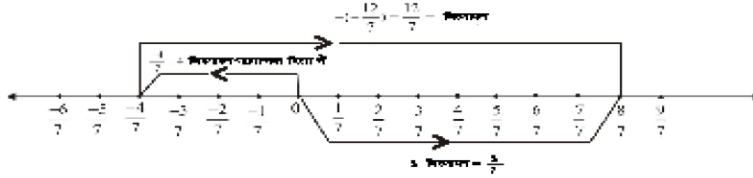
प्रयास कीजिए :

निम्नांकित कोसरल कीजिए ।

(i) $\left(\frac{-5}{2}\right)+\frac{5}{8}$

(ii) $\frac{7}{2}+\left(\frac{8}{-5}\right)$

(iii) $\left(\frac{-9}{-0}\right)+\left(\frac{2}{-5}\right)$

$$x+y=\frac{-4}{5}+\frac{3}{7}=\frac{-8+5}{8}=\frac{-3}{8}$$

$$|x+y|=\left|\frac{-3}{5}\right|=\frac{3}{5}$$

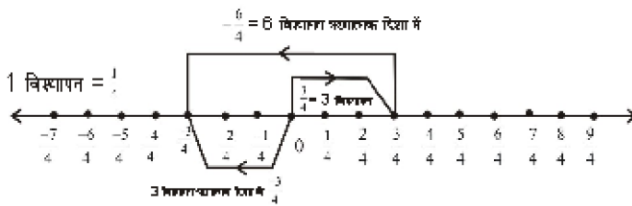
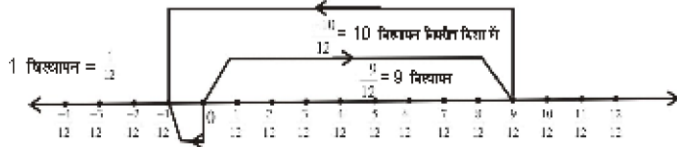
$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2+3}{4}\right)$$

$$\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}$$

$$\frac{5}{8}$$

उत्तर माला

अभ्यास 1 (a)

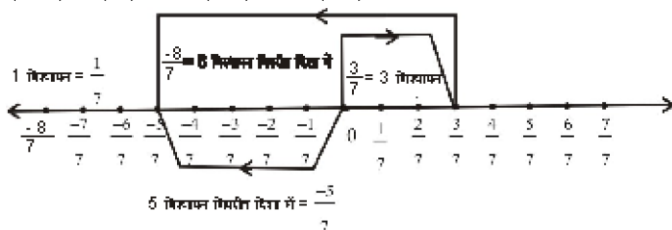
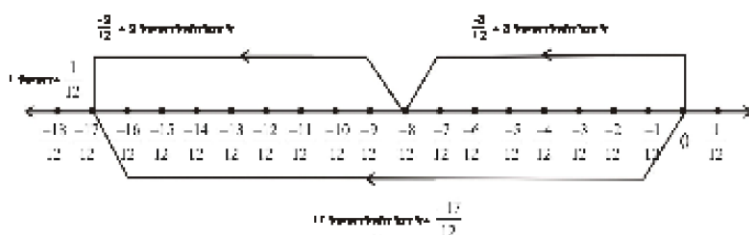
1. (i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{2}{5}$;

2. (i)

(ii)

3. (i) $\left(\frac{-1}{8}\right)$, (ii) $\frac{5}{3}$, **4.** (i) $\frac{7}{9}$, (ii) $\left(\frac{-7}{3}\right)$

अभ्यास 1 (b)

1. (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) असत्य,; **4.** $\left(\frac{-5}{1}\right)$; **5.** (i) $\left(\frac{5}{-1}\right)$, (ii) $\frac{5}{6}$, **6.** (i) $\frac{3}{2}$, (ii) $\frac{-1}{2}$, **7.** (i) $\left(\frac{-5}{7}\right)$, (ii) $\left(\frac{8}{5}\right)$

अभ्यास 1 (c)

1. (i) (–1), (ii) $\frac{7}{3}$, (iii) 1, (iv) $\left(\frac{-7}{3}\right)$

2. (i)

(ii)

3. (i) –1 (ii) $\frac{-3}{9}$; (iii) $\frac{1}{4}$; (iv) $\frac{-3}{2}$; **4.**(i) $\left(\frac{-6}{6}\right)$, (ii) $\frac{2}{8}$; **5.** $\left(\frac{-9}{7}\right)$, **6.** (i) $\left(\frac{-1}{0}\right)$, (ii) $\frac{6}{2}$;
7. (i) असत्य, (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य~

अभ्यास 1 (d)

1. (i) (–12), (ii) $\frac{6}{9}$, (iii) 48, (iv) $\left(\frac{-5}{6}\right)$; **2.** (i) (–28), (ii) (–6), (iii) $\frac{2}{5}$, (iv) $\frac{1}{5}$;

अभ्यास 1 (e)

1. (i) सत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य; **3.** (i) $\frac{2}{1}$, गुणा का क्रम विनिमेय प्रगुण, (ii) $\left(-\frac{1}{3}\right), \frac{2}{3}$, गुणा का साहचर्य प्रगुण, (iii) $\frac{2}{5}, \left(-\frac{5}{7}\right)$, गुणा का योग पर वितरण प्रगुण, **4.** (i) (–2), (ii) $\frac{2}{3}$

अभ्यास 1 (f)

1. (i) असत्य, (ii) सत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, (v) असत्य, (vi) सत्य, (vii) सत्य, (viii) सत्य; **2.** (i) 0, (ii) $\left(\frac{-4}{5}\right)$, (iii) (–2), (iv) –2; **3.** (i) $\frac{3}{2}$, (ii) $\frac{3}{4}$, (iii) $\left(\frac{4}{-5}\right)$, (iv) $\left(\frac{7}{6}\right)$ या $\left(\frac{-7}{-6}\right)$, (v) 1, (vi) 0; **4.** (i) $\left(\frac{-1}{2}\right)$, (ii) $\frac{3}{8}$, (iii) 0, (iv) $\left(\frac{-4}{7}\right)$,
5. (i) $\frac{3}{8}$, (ii) $\left(\frac{-9}{6}\right)$, (iii) $\left(\frac{-6}{7}\right)$, (iv) $\left(\frac{-1}{9}\right)$, (v) $\frac{1}{7}$, (vi) $\frac{0}{9}$, **6.** 0

अभ्यास 1 (g)

1. (i) 16, (ii) $\left(\frac{-2}{2}\right)$, (iii) $\frac{128}{5}$, (iv) $\frac{5}{2}$, (v) $\frac{-5}{6}$, (vi) $\left(\frac{-1}{2}\right)$;

2. (i) सत्य, (ii) असत्य, (iii) असत्य, (iv) सत्य, **3.** (i) $\left(\frac{-5}{6}\right)$, (ii) $\frac{2}{3}$, (iii) $\frac{2}{5}$,

(iv) $\left(\frac{-1}{6}\right)$, (v) (–3), (vi) $\frac{7}{8}$; **4.** $\frac{5}{8}$; **5.** $\frac{0}{7}$; **6.** $\frac{9}{4}$; **7.** $\left(\frac{-9}{4}\right)$;

दक्षता अभ्यास 1 (A)

1. (i) $\left(\frac{-244}{105}\right)$ (ii) $\left(\frac{-5}{9}\right)$ (iii) $\frac{9}{2}$ (iv) $\frac{5}{9}$ **2.** (i) $\left(\frac{-4681}{1224}\right)$ **3.** $\left(\frac{-3}{3}\right)$

4. (i) सत्य (ii) असत्य, (iii) सत्य, (iv) सत्य,

अभ्यास 1 (h)

1. (i) $\frac{5}{7}$, (ii) $\frac{1}{8}$, (iii) $\frac{9}{2}$, (iv) $\frac{8}{9}$; **2.** (i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{5}{2}$, (iii) $\frac{2}{5}$, **3.** (iii) $\frac{5}{4}$; **4.** (i) $\frac{3}{7}$;

5. (iv) $\frac{5}{8}$; **6.** (iii) $\frac{5}{7}$; **7.** (i) >; (ii) =' (iii) =' (iv) < ; **10.** $\frac{1}{2}$, $\frac{-1}{2}$

अभ्यास 1 (i)

1. (iii) $-\frac{3}{4}$; **2.** (iv) $\frac{1}{2}$; **3.** 0; **4.** $\frac{5}{2}$; **5.** 0; $\frac{3}{9}$; **6.** $\frac{-7}{2}$; **7.** $\frac{9}{6}$; **8.** $\frac{5}{8}$; **9.** $\frac{-5}{2}$; **10.**
$3.\overline{6}$, 3.4, $3.1\overline{6}$, 0.375;

अभ्यास 1 (j)

1. $-0.\overline{5}$; **2.** –1.25, –7.5, –3.2, $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-2}{4}, \frac{-3}{0}, \frac{6}{5}$; **3.** $\frac{2}{7}, \frac{5}{6}, \frac{7}{5}, \frac{3}{7}$; **4.** असांत; **5.**
$\frac{7}{0}, \frac{3}{4}, \frac{3}{0}, \frac{701}{100}, \frac{101}{0}, \frac{3}{200}, \frac{1}{0}, \frac{9}{4}$; **6.** (a) √ (b) x (c) √ (d) x

अभ्यास 1 (k)

1. $\frac{9}{4}, \frac{1}{2}, \frac{0}{8}, \frac{131}{8}$ **2.** $\frac{-5}{6}$

दक्षता अभ्यास 1 (B)

1. $\frac{5}{6}$ और $\frac{1}{8}$; **3.** 0, 4, $\frac{-3}{0}$, $\frac{5}{7}, \frac{1}{9}, \frac{7}{0}, \frac{-5}{8}, -\frac{413}{605}$ **5.** $-0.\overline{5}$, 2.1875, $-2.\overline{6}$, $-2.\overline{571428}$; ; **6.** –
0.0025, – 0, $\frac{3}{200}$, **7.** (i) $\frac{2}{3}$; (ii) $\frac{101}{8}$; (iii)

इकाई - 2 वर्ग और वर्गमूल

- वर्ग और वर्गमूल की संकल्पना
- पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान कर संख्याओं के वर्ग एवं वर्गमूल के गुणनखंडों में सम्बन्ध
- पूर्ण वर्ग संख्या का गुणनखंड विधि से वर्गमूल ज्ञात करना
- भाग विधि से पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल ज्ञात करना
- वर्ग संख्या और उसके वर्गमूल में अंकों की संख्याओं में सम्बन्ध
- दशमलव संख्या का वर्गमूल भाग विधि से
- ऐसी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना जो पूर्ण वर्ग नहीं है

2.1 भूमिका

पिछली कक्षा में हमने घात और घातांक के बारे में पढ़ा है। जब किसी संख्या की घात दो हों तो हम उसे उस संख्या का वर्ग कहते हैं। 22 को 2 की घात 2 या 2 का वर्ग कहा जाता है।स्पष्ट है कि 22 का अर्थ 2×2 होता है। यदि कोई संख्या दी गयी है तो यह पता करने के लिए कि वह कौन-सी संख्या है जिसका उसी में गुणा करने पर दी गयी संख्या प्राप्त होती है, हमें उस संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है। इसी प्रकार किसी वर्ग का क्षेत्रफल ज्ञात हो तो उसकी भुजा की माप ज्ञात करने में भी वर्गमूल की आवश्यकता होती है। दैनिक जीवन में भी अनेक अवसरों पर वर्ग या वर्गमूल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती रहती है। इस इकाई में हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालने की विधियों का अध्ययन करेंगे तथा जो संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं भी हैं उनका निकटतम वर्गमूल भी ज्ञात करने का अध्ययन करेंगे।

2.2 वर्ग और वर्गमूल की संकल्पना :

आप जानते हैं कि यदि किसी संख्या को उसी संख्या से गुणा करें तो गुणनफल से प्राप्त संख्या को, गुणा की गई संख्या का वर्ग कहते हैं। जैसे -

$5\times5 =25 =5^2$

$6 \times 6 = 36 = 6^2$

$7 \times 7 =49 = 7^2$

उपरोक्त को कथनों के रूप में इस भाँति व्यक्त किया जा सकता है कि 5 का वर्ग 25 है, 6 का वर्ग 36 है और 7 का वर्ग 49 है। इस प्रकार किसी संख्या "की घात 2" को उस संख्या का वर्ग कहते हैं।

निम्नांकित आकृति को ध्यान से देखिए तथा उसके नीचे लिखे प्रश्नों का उत्तर सोचकर बताए

(क) उपर्युक्त आकृति के कितने भाग हैं ?

(ख) प्रत्येक भाग में कितनी भुजाएँ हैं ?

(ग) प्रत्येक भाग के भुजा की लम्बाई और चौड़ाई में क्या सम्बन्ध है ?

(घ) इन आकृतियों को क्या कहते हैं ?

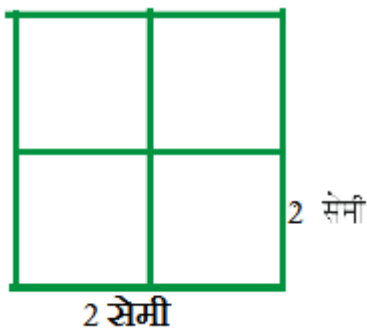
आकृति को देखने से ज्ञात होता है कि

(क) आकृति के कुल तीन भाग हैं।

(ख) प्रत्येक भाग में चार भुजाएँ हैं।

(ग) प्रत्येक भाग की भुजाओं की लम्बाई और चौड़ाई समान हैं।

(घ) प्रत्येक आकृति एक वर्ग हैं।

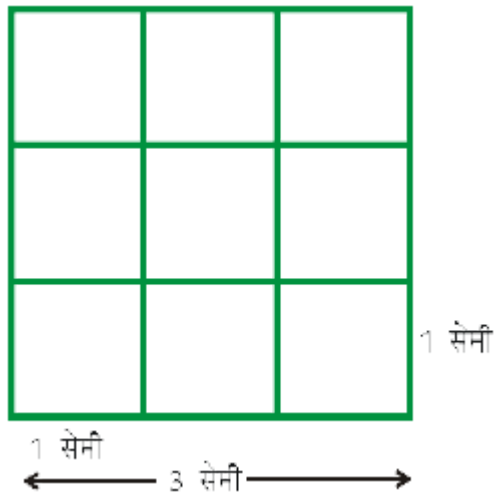
इस प्रकार यदि एक वर्ग की भुजा 2 सेमी हो तो उससे बनने वाले 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल के कुल वर्गों की संख्या

$2 \times 2 = 2^2 = 4$ होगी

जो चित्रानुसार भी सत्य है अर्थात् 4, 2 का वर्ग है।

उदाहरण 1 :3 सेमी भुजा के वर्ग में 1 सेमी^{2} के क्षेत्रफल के वर्गों की संख्या चित्र बनाकर बताइए।

हल : सर्वप्रथम 3 सेमी भुजा का एक वर्ग बनाइए उसकी प्रत्येक भुजा को तीन समान भागों में बाँट कर आमने-सामने स्थित बिन्दुओं को मिलाइए।

इस प्रकार कुल वर्गों की संख्या 9 होगी

अर्थात् 9, संख्या 3 का वर्ग है।

उदाहरण 2 : उपर्युक्त की भाँति 4सेमी भुजा के वर्ग में 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल के छोटे वर्गों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : 4सेमी भुजा के वर्ग में 1 सेमी^{2} क्षेत्रफल के कुल$4\times 4= 16$ वर्ग हैं ।

उदाहरण 3 : वह कौन सी संख्या है जिसको यदि उसी संख्या से गुणा करें तो गुणनफल 25 होता है?

हल : क्योंकि $5 \times 5 = 5^2 = 25$

अत: वह संख्या 5 है ।

इसी प्रकार अन्य पूर्णांक लेकर हम देखते हैं कि :

$6 \times 6 = 6^2 = 36$

$7 \times 7 = 7^2 = 49$

जिस प्रकार से योग की विपरीत संक्रिया घटाना तथा गुणा की प्रतिलोम संक्रिया भाग है, उसी प्रकार वर्गमूल प्राप्त करना भी वर्ग करने की प्रतिलोम संक्रिया है।

अतः

5 का वर्ग 25 है और 25का वर्गमूल 5 है ।

6 का वर्ग 36 है और 36 का वर्गमूल 6 है ।

7 का वर्ग 49 है और 49 का वर्गमूल 7 है ।

0 का वर्ग 0 है और 0 का वर्गमूल भी 0 है ।

आप पढ़ चुके हैं कि वर्ग का क्षेत्रफल =भुजा $\times$ भुजा =(भुजा)^2

इस प्रकार वर्ग की एक भुजा का माप उस वर्ग के क्षेत्रफल का वर्गमूल होता है।

वर्गमूल को चिह्न $\sqrt{}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$\sqrt{25}$ से प्रदर्शित करते हैं।

$\sqrt{36}$ का अर्थ है, 36 का वर्गमूल ।

इस प्रकार $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{36} = 6$ आदि ।

उदाहरण 4: -1, -2, -3 और -4 ऋणात्मक पूर्णांक संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

हल : $(-1)^2 = (-1) \times (-1) = 1$
$(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$
$(-3)^2 = (-3) \times (-3) = 9$
$(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

देखिए :

1. (-1) तथा 1 दोनों का वर्ग 1है। अत: 1 के वर्गमूल $\pm\sqrt{1} = \pm 1$ हैं ।
2. (-2) तथा 2 दोनों का वर्ग 4 हैं ।अत: 4 के वर्गमूल $\pm \sqrt{4} = \pm 2$ हैं ।
3. (-3) तथा 3 दोनों का वर्ग 9 हैं ।अत: 9 के वर्गमूल $\pm\sqrt{9} = \pm 3$ हैं ।
4. (-4) तथा 4 दोनों का वर्ग16 हैं ।अत: 16 के वर्गमूल $\pm\sqrt{16} = \pm 4$ हैं ।

ध्यान दे : $\sqrt{25}$ का अर्थ 5 है तथा $-\sqrt{25}$ का अर्थ -5 है जबकि 5 तथा -5 दोनो ही 25 के वर्गमूल है।

निष्कर्ष :

1. शून्येतर पूर्णांकों के वर्ग धनात्मक पूर्णांक अथवा प्राकृतिक संख्याएँ होती हैं ।
2. वर्ग पूर्णांकों के वर्गमूल धनात्मक तथा ऋणात्मक पूर्णांक होते हैं। यथा x^2 के वर्गमूल $\pm x$ हैं।
3. शून्य का वर्ग शून्य होता है ।
4. शून्य का वर्गमूल शून्य होता है ।

उदाहरण 5 : $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ परिमेय संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

हल :

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$

$\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{25}$

$\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

इसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

(i) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}, \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

(ii) इस प्रकार $\frac{4}{9}$ के वर्गमूल $\pm\frac{2}{3}$, $\frac{9}{16}$ के वर्गमूल $\pm\frac{3}{4}$ इत्यादि होंगे।

निष्कर्ष :

1 . परिमेय संख्याओं के वर्ग धनात्मक परिमेय (भिन्न) होते हैं।
2 . वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल धनात्मक तथा ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ होती हैं ।

प्रयास कीजिए

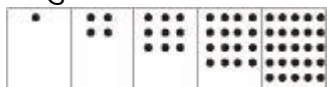
1 से 9 तक की संख्याओं के वर्ग एवं उनके वर्गमूल पर आधारित निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए ।

ध्यान दें, (1) यदि x प्राकृतिक संख्या हो तो x कावर्ग x^2एक प्राकृतिक संख्या है ।
(2) यदि x^2 प्राकृतिक संख्या हो तो x^2 के वर्गमूल $\pm x$ होते हैं किन्तु -x प्राकृतिक संख्या नहीं है।

2.3 पूर्ण वर्ग संख्या की पहचान एवं उसके वर्गमूल का गुणनखंडों में सम्बन्ध

पूर्ण वर्ग संख्या :

उदाहरण 6 : अपनी अभ्यास पुस्तिका पर 1, 4, 9, 16 बिन्दुओं को इस प्रकार दर्शाइए कि बिन्दुओं की संख्या उध्र्वाधरत: एवं क्षैतिजत: पंक्तिओं में समान रहें ।

बिन्दुओं 1, 4, 9, 16, 25 को निम्नवत ज्यामितीय रूप में इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है कि बिन्दुओं की संख्या स्तम्भों और पंक्तियों में समान रहे और बिन्दुओं से वर्ग बने।

$1 = 1 \times 1 = 1^2$ $4 = 2 \times 2 = 2^2$ $9 = 3 \times 3 = 3^2$ $16 = 4 \times 4 = 4^2$ $25 = 5 \times 5 = 5^2$

अत : 1, 4, 9, 16, 25 संख्याओं को पूर्ण वर्ग संख्या या वर्ग संख्या कहते हैं।

उदाहरण 7 : प्राकृतिक संख्या 1 से 9 तक की संख्याओं के वर्ग कर पूर्ण वर्ग संख्या की तालिका
बनाइए ।

हल :

a a2 पूर्ण वर्ग संख्या a a2 पूर्ण वर्ग संख्या
1 1^2 1 6 6^2 36
2 2^2 4 7 7^2 49
3 3^2 9 8 8^2 64
4 4^2 16 9 9^2 81
5 5^{225}

प्रयास कीजिए :

10 से 20 तक की प्राकृतिक संख्याओं के वर्ग कर पूर्ण वर्ग संख्या की तालिका बनाइए।

ध्यान दीजिए :

36, 49,81, 100 आदि अन्य इस प्रकार की संख्याओं को वर्ग रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

2.3.1 पूर्ण वर्ग संख्या का परीक्षण

उदाहरण 8 : ज्ञात कीजिए कि क्या 225 एक पूर्ण वर्ग संख्या है ।

हल : सर्वप्रथम हम 225 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं ।

5 225
5 45
3 9

3
चूँकि 225 = 3 × 3 × 5 × 5

अत: 225 = $\overline{3\times3}$ × $\frac{12+(-35)}{42}$ = (3 × 5) × (3 × 5) = $(3 \times 5)^2$

यहाँ हम का एक जोड़ा और का दूसरा जोड़ा बनाते हैं तो कोई अभाज्य गुणनख्ांड शेष नहीं रहता है । अत: 225 पूर्ण वर्ग संख्या है ।

उदाहरण 9 : ज्ञात कीजिए कि क्या 360 एक पूर्ण वर्ग संख्या है ।

हल : सर्व प्रथम 360 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं ।

2 360
2 180
2 90
3 45
3 15
5

360 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5

या 360 = 2 × 5

ÙeneB nce keâe Skeâ peesÌ[e और $\overline{3\times3}$ keâe otmeje peesÌ[e yeveeles nQ तो DeYeepÙe iegCeveKeb[2 और 5 Mes<e jnles nQ efpevekesâ peesÌ[s veneR हैं ।

अत : 360 पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है ।

प्रयास कीजिए :

बताइए निम्नांकित संख्याओं में कौन-कौन सी पूर्ण वर्ग संख्याएँ हैं :

64, 144, 81, 810

उपर्युक्त उदाहरणों से हम देखते हैं कि :

किसी संख्या के अभाज्य गुणनखंडों में समान खंडों के जोड़े बनाने के पश्चात् यदि उनमें से कोई अभाज्य गुणनखंड शेष नहीं रहता तो वह पूर्ण वर्ग संख्या होती है।

2.3.2 सम और विषम संख्याओं के वर्गों की विशेषता

उदाहरण 10: सम संख्याओं 2, 4, 6 और 8 में प्रत्येक के वर्ग ज्ञात कीजिए और बताइए कि प्राप्त संख्या सम है या विषम ।

हल : 2 का वर्ग = 2^2 = 4 सम संख्या

4 का वर्ग = 4^2 = 16 सम संख्या

6 का वर्ग =6^2 = 36 सम संख्या

8 का वर्ग = 8^2 = 64सम संख्या

प्रयास कीजिए :

कुछ अन्य सम संख्याएँ लेकर वर्ग कीजिए और तालिका बनाकर देखिए कि क्या प्राप्त संख्याएँ भी सम संख्याएँ हैं ।

उदाहरण 11 : विषम संख्याओं 1, 3, 5 और 7 प्रत्येक के वर्ग ज्ञात कीजिए और बताइए कि प्राप्त संख्याएँ विषम हैं अथवा सम हैं ।

हल : 1 का वर्ग = 1^2 = 1**विषम संख्या**

3 का वर्ग = 3^2 = 9**विषम संख्या**

5 के वर्गमूल = 5^2 = 25**विषम संख्या**

7 के वर्गमूल = 7^2 = 49 विषम संख्या

इसी प्रकार अन्य विषम संख्याएँ लेकर प्रत्येक के वर्ग कीजिए और तालिका बनाकर देखिए कि क्या प्राप्त संख्याएँ भी विषम हैं ।

(1) सम संख्या का वर्ग भी एक सम संख्या होती है ।

(2) विषम संख्या का वर्ग भी एक विषम संख्या होती है ।

सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. निम्नांकित में कौन संख्याएँ पूर्ण वर्ग हैं ?

64, 121, 144, 110, 81, 36

2. निम्नांकित में कौन संख्याएँ सम संख्याओं के वर्ग हैं ?

121, 256, 1296, 225, 676

3. निम्नांकित में कौन सी संख्याएँ विषम संख्याओं के वर्ग हैं ?

169, 144, 289, 256, 361

अभ्यास 2 (a)

1. 1 से 15 के बीच की सभी विषम संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए।

2. निम्नांकित के मान बताइए।

(i) 56^2 (iii) 82^2

(ii) 65^2 (iv) 75^2

3. निम्नांकित परिमेय संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :

(i) -5 (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $-\frac{6}{7}$

(iv) $\frac{(-40)+33}{60}$ (v) -125 (vi) $\frac{5-12}{60}$

2.4निम्नांकित परिमेय संख्याओं के वर्ग ज्ञात कीजिए :($-x$)^2 के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ ॆ एक परिमेय संख्या है, अर्थात्

$y = (x)^2$ अथवा $y = (-x)^2$

अत: y के वर्गमूल $\frac{-40 \; +33}{60}$ तथा $-\frac{7}{60}$ दोनों हैं ।

निष्कर्ष :

किसी भी पूर्ण वर्ग परिमेय संख्या $y = x^2$ *के वर्गमूल* होते हैं, जहाँ 2069.ज्हुस्वयमेव एक परिमेय संख्या है ।

विशेष :

(1) पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल दो विपरीत चिह्नों वाली समान संख्याएँ होती हैं तथा उन्हें उसके वर्गमूल कहते हैं ।

(2) सुविधा की द=ष्टि से दी हुई संख्या का एक वर्गमूल ज्ञात करके दूसरे को विपरीत चिह्न लगाकर ज्ञात कर लेते हैं ।

2.4.1. गुणनखंड विधि से पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करना

उदाहरण 12 : निम्नांकित पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(ग़्) 36 (ग़्ग़्) 144

हल (ग़्) 36 का वर्गमूल ज्ञात करना है ।

पहले 36 के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं ।

2 36

2 18

3 9

3

$36 = 2 \; 2 \times 3 \times 3$

अभाज्य गुणनखंडों में से समान संख्याओं के जोड़े बनाते हैं ।

$36 = \overline{2 \times 2}$ $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{17}{10}+\left(\frac{7}{-12}\right)$

प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखंड लेकर उनके गुणनफल प्राप्त करते हैं :

यहाँ पर $2 \; 3 = 6$

अर्थात् $\left(\frac{-5}{6}\right)+\frac{17}{10}+\left(\frac{-7}{12}\right)$,

इस प्रकार 36 के वर्गमूल ± 6, – 6 हुए।

(ग़्ग़्) 144का वर्गमूल ज्ञात करना है ।

पहले 144के अभाज्य गुणनखंड प्राप्त करते हैं ।

2 144

2 72

2 36

2 18

3 9

3

अभाज्य गुणनखंडों में से समान संख्याओं के जोड़े बनाते हैं ।

$144 = \frac{(-50)+102+(-35)}{60}$

प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखंड लेकर उनके गुणनफल प्राप्त करते हैं :

यहाँ पर $2 \times 2 \times 3 = 12$

अर्थात्, $\frac{-50 \;\; +102-35}{60}$

इस प्रकार 144के वर्गमूल ±12, –12 हुए।

उदाहरण 13 : गुणनखंड विधि से निम्नांकित पूर्ण वर्ग संख्याओं के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(i) 576 **(ii)** 2025

हल : (ग) 576 का वर्गमूल = $\frac{17}{60}$

2 576
2 288
2 144
2 72
2 36
2 18
3 9
3

5 2025
5 405
3 81
3 27
3 9
3

$\because 576 = 2 \times 2 \times 2 \; (-1) \; 2 \; \left(\frac{-2}{3}\right) \; 2 \; 2 \; 3 \; 3$

$= \frac{-15}{11}$ $\overline{2 \times 2} \times \overline{2 \times 2} \times \frac{2}{5}+\left(\frac{-8}{-3}\right)+\left(\frac{4}{-5}\right)+\left(\frac{-2}{3}\right)$

$\left(\frac{-4}{7}\right) = 2 \left(\frac{-12}{7}\right) 2 \frac{1}{7} 2$ 3

$= 24$

अत: $\frac{8}{7}$ 24

(ii) 2025 का वर्गमूल $= \sqrt{2025}$

$\because 2025 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$

या, $2025 = \overline{3 \times 3} \times \overline{3 \times 3} \times \overline{5 \times 5}$

$\therefore \sqrt{2025} = 3 \times 3 \times 5$

$= 45$

अत: $\sqrt{2025} = 45$

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए :

(1) सबसे पहले दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं ।
(2) प्राप्त अभाज्य गुणनखंडों से समान खंडों के जोड़े बनाते हैं ।
(3) प्रत्येक जोड़े में से एक अभाज्य गुणनखंड चुन लेते हैं ।
(4) इन चुने हुए अभाज्य गुणनखंडों का गुणफल ही दी गई संख्या का धनात्मक वर्गमूल होता है ।
(5) निकाले गये वर्गमूल के चिह्न को बदलकर दोनों वर्गमूल ज्ञात किये जा सकते हैं ।

2.4.2 गुणनखंड विधि से दो संख्याओं के गुणनफल अथवा भागफल का वर्गमूल ज्ञात करना

हमने पूर्ण वर्ग पूर्णांक संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात किये हें। इसी प्रकार अब हम पूर्ण वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल भी ज्ञात कर सकते हैं।
निम्नांकित उदाहरणों को ध्यान से पढ़िए ।

(क) $\sqrt{9 \times 100} \cdot \sqrt{(3 \times 3) \times (2 \times 2) \times (5 \times 5)}$

$= 3 \times 2 \times 5 = 3 \times 10 = \sqrt{9} \times \sqrt{100}$

अत: $\sqrt{9 \times 100} = \sqrt{9} \times \sqrt{100}$

(Ke) $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2 \times 2}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}$

$= \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

अत: $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि :

याfद a और b दो पूर्ण वर्ग संख्याएँ हों, तथा द्वितीय (भाग की) स्थिति में, $b \neq 0$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ **और** $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

उदाहरण 14: परिमेय संख्या $\frac{256}{441}$ के वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

2 256
2 128
2 64
2 32
2 16
2 8
2 4
2

3 441
3 147
7 49
7

nue : $\frac{256}{441}$ का वर्गमूल · $\sqrt{\frac{256}{441}} = \frac{\sqrt{256}}{\sqrt{441}}$

$\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2$

तथा $\sqrt{441} = 3 \times 7$

$\therefore \sqrt{\frac{256}{441}} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2}{3 \times 7}$

अत: $\frac{256}{441}$ का वर्गमूल $\pm\frac{16}{21}$ हैं

उदाहरण 15 : संयुक्त भिन्न का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए । $2\frac{14}{25}$

हल : $2\frac{14}{25} = \frac{64}{25}$, (विषम भिन्न में बदलने पर)

$2\frac{14}{25}$ का वर्गमूल $= \sqrt{2\frac{14}{25}} = \sqrt{\frac{64}{25}}$

$= \frac{\sqrt{64}}{\sqrt{25}}$

$\because \sqrt{64} = 2 \times 2 \times 2$

तथा $\sqrt{25} = 5$

$\therefore \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{2 \times 2 \times 2}{5}$

$= \frac{8}{5}$, अत: $\sqrt{\frac{64}{25}} = \pm\frac{8}{5}$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित परिमेय संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{121}{625}$ (ii)

उपर्युक्त उदाहरणों से निम्नांकित निष्कर्ष प्राप्त होता है :

(1) याfद परिमेय संख्या संयुक्त भिन्न के रूप में है, तो सबसे पहले इसे विषम भिन्न में बदलते हैं।

(2) प्राप्त भिन्न के अंश और हर के अलग-अलग वर्गमूल ज्ञात करते हैं ।

(3) अंश और हर के वर्गमूलों को अंश और हर में लिखने पर प्राप्त भिन्न दी गई परिमेय संख्या का वर्गमूल होता है ।

उदाहरण 16: एक सेनानायक ने अपने 3600 जवानों की एक टोली को विभिन्न पंक्तियों में इस प्रकार खड़े होने को कहा, जिससे प्रत्येक पंक्ति में उतने ही जवान खड़े हों, जितनी पंक्तियाँ हैं। ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक पंक्ति में कितने जवान खड़े होंगे ।

हल: प्रत्येक पंक्ति में जवानों की संख्या $= \sqrt{3600}$

पहले हम 3600 के अभाज्य गुणनखंड करते हैं ।

2 3600

2 1800

2 900

2 450

5 225

5 45

3 9

3

$3600 = \overline{2\times2}\times\overline{2\times2}\times\overline{3\times3}\times\overline{5\times5}$

अत: $\sqrt{3600} = 2\times2\times3\times5 \;\; = \theta$

विशेष : जवानों की संख्या ़ऋणात्मक नहीं हो सकती है, अत: उत्तर में – 60 नहीं लेंगे। प्रत्येक पंक्ति में जवानों की संख्या 60 है ।

उत्तर की जाँच 602490.ज्हु60= 3600

अत: उत्तर सही है ।

उदाहरण 17: वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 6075 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग हो।

हल: पहले हम 6075 के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात करते हैं ।

5 6075

5 1215

3 243

3 81

3 27

3 9

3

6075 = 5 × 5 × 3 × 3 × 3 × 3 × 3

अभाज्य गुणनखंडों के जोड़े बनाने पर

$6075 = \overline{5\times5}\times\overline{3\times3}\times\overline{3\times3}\times3$

यहाँ समान अभाज्य गुणनखंडों के विभिन्न जोड़े बनाने के पश्चात् हम देखते हैं कि एक अभाज्य गुणनखंड 3 शेष रह जाता है, जिसका जोड़ा नहीं है ।

अत: याfद 6075 को 3 से गुणा कर दें तो इस 3 का भी जोड़ा बन जाएगा और गुणनफल एक पूर्ण वर्ग संख्या होगी ।

उदाहरण 18: उपर्युक्त उदाहरण 17 में दी गयाr संख्या में किस छोटी से छोटी संख्या से भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा।

हल : 2500.ज्हु

हम देखते हैं कि अभाज्य गुणनखंड 3 का जोड़ा नहीं हैं तथा उससे भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग संख्या होगी। अतः अभीष्ट संख्या 3 है।

अभ्यास 2 (ं)

1. गुणनखंड विधि से निम्नांकित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(i) 7744 **(ii)** 11664 **(iii)** 4900 **(iv)** 47089

2. गुणनखंड विधि से निम्नांकित के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

(i) $\frac{625}{1296}$ **(ii)** $\frac{529}{196}$ **(iii)** $4\frac{2}{9}$ **(iv)** $3\frac{3}{121}$ **(v)** $7\frac{4}{9}$

3. एक बाग में आम के 2304पेड़ हैं । प्रत्येक पंक्ति में उतने ही पेड़ हैं, जितनी कि बाग में पंक्तियाँ हैं । बाग में कुल कितनी पंक्तियाँ हैं।

4. एक सेना नायक ने अपनी सेना को टोलियों में इस प्रकार विभाजित किया कि प्रत्येक टोली में उतने ही सैनिक थे जितनी कि कुल टोलियाँ थीं। याfद उस सेना में कुल 6561 सैनिक थे तो प्रत्येक टोली में कितने सैनिक थे।

5. एक सेना नायक अपने जवानों को पंक्तियों में खड़ा करके एक वर्ग बनवाता हैं ।बाद में उसे ज्ञात होता है कि 60 जवान शेष रह जाते हैं । याfद उसके पास कुल 8160 जवान थे, तो बताइए कि प्रत्येक पंक्ति में सेना नायक ने कितने जवान खड़े किये थे।

6. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 1890 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग होगा ।

7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 9408 में भाग देने से भागफल पूर्ण वर्ग हो जाय।

2.5. भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

गुणनख्ंाड विधि से हम केवल पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं, क्योंकि इनके अभाज्य गुणनखंड सरलता से ज्ञात किये जा सकते हैं । जिन संख्याओं के गुणनखंड सरलता से नहीं ज्ञात किये जा सकते अथवा जो पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं होती हैं तो उनके वर्गमूल हम भाग विधि से ज्ञात करते हैं ।

उदाहरण 19. 1849 का धन वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए ।

हल: 1849 का धन वर्गमूल $=\sqrt{1849}$

इकाई अंक से प्रारम्भ करके अंकों के प्रत्येक जोड़े पर पड़ी रेखा खींचते हैं ।

2. 1 से 9 तक की संख्याओं में से उस संख्या का वर्ग ज्ञात करते हैं, जिसका मान प्रथम जोड़ा 18 के बराबर या 18 से कम है । जैसे 42 =16

3. वर्गमूल के दहाई स्थान पर 4लिखते हैं और 4के वर्ग 16 को 18 के नीचे लिखकर घटाते हैं ।

4. शेषफल 2 के आगे दूसरे जोड़े 49 को उतार लेते हैं, इस प्रकार नया भाज्य 249 है।

5. अगली क्रिया में नये भाजक को प्राप्त करने के लिए पहले पूर्व भाजक 4का दूना 8 लिखते हैं अथवा 4में 4जोड़कर 8 प्राप्त कर लेते हैं।

6. 249 के इकाई अंक को छोड़कर 24में नये भाजक 8 से भाग देते हैं। भागफल 3 आता हैं ।3 को पूर्व में प्राप्त 8 के दाहिने स्थान पर रखते हैं ।

7. 83 में 3 से गुणा करके गुणनफल को भाज्य 249 के नीचे रखकर घटाते हैं। शेषफल शून्य आता है ।

8. इस प्रकार प्राप्त संख्या 43 अभीष्ट वर्गमूल है ।

43
4 8 9
+4 16
(4×2=8) 83 249
249
0

अत : $\sqrt{1849} = 43$

प्राप्त वर्गमूल 43 को 43 से गुणा करके उत्तर की जाँच कीजिए ।

$43 \times 43 = 1849$

अत : उत्तर सही है ।

उदाहरण 20. भागविधि से 11449 का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल: 11449 का धन वर्गमूल $= \sqrt{11449}$

1. इकाई स्थान से प्रारम्भ करके संख्या के अंकों के जोड़े बनायें। दस हजारवें स्थान के अंक 1 का जोड़ा नहीं है । 1 का वर्गमूल 1 होता हैं ।अतः वर्गमूल में सैकड़े के स्थान पर 1 लिखें तथा 1के नीचे लिखकर घटायें। अब दायाR ओर दूसरा जोड़ा 14है । 1 का दूना 2 आता हैं ।अथवा 1 ± 1 =2 आता है।

2. यहाँ 14की दहाई 1 में नये भाजक 2 का भाग देने पर भागफल शून्य आता हैं । अतः नये भाजक 2 के दाहिने स्थान पर 0 लिखकर 20 प्राप्त किया एवं अभीष्ट वर्गमूल 1 के आगे भी 0 रखते हैं ।

3. 14के आगे का जोड़ा 49 उतार लेते हैं। नया भाज्य 1449 के 9 को छोड़कर शेष 144में 20 का भाग देने पर भागफल 7 आता है ।

4. शेष क्रिया पूर्व की भाँति करके अभीष्ट वर्गमूल प्राप्त करें ।

उदाहरण 21 : भाग विधि से $21\frac{2797}{3364}$ का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

[: $21\frac{2797}{3364} = \frac{21 \times 3364 + 2797}{3364} = \frac{70644 + 2797}{3364} = \frac{73441}{3364}$

271 58
2 7 34 4 (ध्यान दें, 33 में 4 5 3 64
+2 4 की भाग से भागफल + 5 25
47 3 34 8 आता है पर 48 108 864
+7 3 29 में 8 का गुणा करने 864

541 541 पर 334से अधिक 0
541 आ जाता है ।)
0

इस प्रकार $\sqrt{1\frac{2797}{3364}} = \sqrt{\frac{73441}{3364}}$

उदाहरण 22 : वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 194491 में से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग हो जाय ।

441
4 $\overline{9}\ \overline{4}\ \overline{9}$ दी गई संख्या का वर्गमूल भाग विधि से निकालने
+4 16पर शेषफल 10 बचता हैं ।यादि संख्या में से 10
84 344 घटा दिया जाय तो शेषफल पूर्ण वर्ग होगा।
+4 336 अत: वह छोटी से छोटी संख्या 10 है ।
881 891
881
10

उदाहरण 23 : वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे यादि 306452 में जोड़ दें, तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जाय ।

हल:553 554
5 $\overline{0}\ \overline{4}\ \overline{2}$ 5 $\overline{0}\ \overline{4}\ \overline{2}$
+ 5 25 +5 25
105 564 105 564
+ 5 525 +5 525
1103 3952 1104 3952
3309 4416
643 – 464

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि दी गई संख्या (553)2 से बड़ी है परन्तु (554)2 से छोटी हैं ।यादि दी गई संख्या में हम (4416 -3952) अर्थात् 464जोड़ दें, तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जायेगा ।

अत अभीष्ट संख्या 464 हैं ।अपने उत्तर की जाँच कीजिए ।
306452 + 464 = 306916
306916 का भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात कीजिए। देखिए यह एक पूर्ण वर्ग संख्या है ।
उदाहरण 24: छ: अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए ।
हल : छ: अंकों की छोटी से छोटी संख्या 100000
100000 का वर्गमूल $= \sqrt{100000}$

316 317

3 0 0 0 3 0 0 0

+3 9 +3 9

61 100 61 100

+1 61 +1 61

626 3900 627 3900

3756 4389

144 – 489

का वर्गमूल ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि यह छ: अंकों की सबसे छोटी पूर्ण वर्ग संख्या से 489 कम है।

अतः छ: अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या =100000 ± 489 =100489

उदाहरण 25 : छ: अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए ।

हल : छ: अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या 999999

999999 का वर्गमूल $\sqrt{999999}$

999

9 9 9 9

+9 81

189 1899

+9 1701

1989 19899

17901

1998

999999 का वर्गमूल ज्ञात करने पर हम पाते हैं कि प्राप्त वर्गमूल का वर्ग (999)2, 999999 से 1998 कम है ।

अत: छह अंकों की वह बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या = 999999 - 1998 = 998001

अभ्यास 2 (c)

1. भागविधि से निम्नांकित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 4489 **(ii)** 27225 **(iii)** 49284

(iv) 1234321 **(v)** 4937284

2. भागविधि से निम्नांकित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{361}{625}$ **(ii)** $3\frac{5}{9}$ **(iii)** $2\frac{5}{169}$

(iv) $0\frac{151}{225}$ **(v)** $3\frac{394}{729}$

3.. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 4931में जोड़ दें तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जाय।

4. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या बताइए जिसे 18265 में से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग हो जाय।

5. पाँच अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या बताइए ।

6. 62500 का गुणनखंड विधि तथा भागविधि से वर्गमूल ज्ञात करके दोनों उत्तरों की तुलना कीजिए ।

2.6 वर्ग संख्या और उसके वर्गमूल में अंकों की संख्याओं में सम्बन्ध

निम्नांकित उदाहरणों में हम संख्या और उनके वर्गमूल में अंकों की संख्या के सम्बन्ध में विचार करेंगे ।
1 से 9 तक के पूर्णांकों के वर्ग तथा उनके वर्गमूल की तालिका को देखिए, जहाँ a एक पूर्णांक है ।

a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$	a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$
1	1	$\sqrt{1}$	± 1	6	36	$\sqrt{36}$	± 6
2	4	$\sqrt{4}$	± 2	7	49	$\sqrt{49}$	± 7
3	9	$\sqrt{9}$	± 3	8	64	$\sqrt{64}$	± 8
4	16	$\sqrt{16}$	± 4	9	81	$\sqrt{81}$	± 9
5	25	$\sqrt{25}$	± 5				

1ालिका से स्पष्ट है कि 1 से 9 तक की प्रत्येक संख्या का वर्ग करने पर प्राप्त संख्या में एक या दो अंक होते हैं अर्थात् एक या दो अंकों वाली संख्या के वर्गमूल एक अंक की संख्या होती है ।

प्रयास कीजिए :

10 से 99 तक में से कुछ संख्याओं जैसे 10, 25, 31, 32, 50, 65, 85, 99 के वर्गों एवं उनके वर्गमूल तालिका में अंकित कीजिए, जहाँ a पूर्णांक है ।

a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$	a	a^2	$\sqrt{a^2}$	$\pm a$
10	....	....	....	50	....	....	....
25	625	$\sqrt{625}$	± 25	65	....	....	....
31	....	....	....	85	....	.....	....
32	1024	$\sqrt{1024}$	± 32	99	9801	$\sqrt{9801}$	± 9

उपर्युक्त तालिका से हमें ज्ञात होता है कि 10 से 99 तक की संख्या के वर्ग करने पर प्राप्त संख्याएं 3 या 4अंकों की हैं और प्रत्येक के वर्गमूल में दो अंक हैं । हम देख सकते हैं कि 100 से 999 तक की संख्याओं (अर्थात् तीन अंक वाली संख्याएँ) के वर्गों में पाँच या छह अंक होंगे अर्थात् पाँच या छः अंकों की संख्या के वर्गमूल में तीन अंक होंगे।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपने अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए :

पूर्ण वर्ग संख्याओं में अंकों की संख्या	इन संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या
1 या 2 अंक	1
3 या 4 अंक	...

5 या 6 अंक ...

7 या 8 अंक 4

9 या 10 अंक ...

2.6.1 किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करना

किसी संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात करने के लिए, उस संख्या के अंकों पर दायाR ओर से अर्थात् इकाई अंक से प्रारम्भ करके अंकों के प्रत्येक जोड़े पर पड़ी रेखा खींचते जाते हैं। बायाR ओर याfद एक ही अंक शेष रहता है, तो उस पर भी पड़ी रेखा खींचते हैं ।

खींची गई पड़ी रेखाओं की संख्या उस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या को व्यक्त करती है । स्पष्ट है कि

1. याfद किसी पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम हो, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की आधी होती है ।

2. याfद किसी पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम है, तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या के आधे के बराबर होती है ।

उदाहरण 26 : निम्नांकित संख्याओं के वर्गमूल में अंकों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

256, 1225, 14641, 783225

nue: **(i)** $\overline{2}\,\overline{56}$ में पड़ी रेखा की संख्या दो है ।

अत: 256 के वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है ।

(ii) $\overline{12}\,\overline{25}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या दो हैं ।इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 2 है ।

(iii) $\overline{1}\,\overline{46}\,\overline{41}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या 3 हैं ।अत: इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 3 होगी।

(iv) $\overline{78}\,\overline{32}\,\overline{25}$ में पड़ी रेखाओं की संख्या 3 है । अतः इसके वर्गमूल में अंकों की संख्या 3 होगी ।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. दो अंकों की किसी संख्या के वर्ग में कम से कम कितने अंक होते हैं ?
2. तीन अंकों की किसी संख्या के वर्ग में अधिक से अधिक कितने अंक होते हैं ?
3. 289 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे ?
4. 15625 के वर्गमूल में कितने अंक होंगे ?
5. छह अंकों की संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या बताइए ।

अभ्यास 2(ु)

निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर बताइए :

1. संख्या 1809025 के वर्गमूल में अंकों की संख्या है :

(i) 2 **(ii)** 5 **(iii)** 4 **(iv)** 3

2. 100 से 999 तक की प्रत्येक संख्या के वर्ग के वर्गमूल में अंकों की संख्या है:

(i) 2 **(ii)** 4

(iii) 5 **(iv)** 3

3. एक सात अंकों की संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या है :

(i) 2 **(ii)** 3

(iii) 4 **(iv)** 5

4. किसी संख्या के वर्गमूल में केवल दो अंक हैं, तो वह संख्या है :

(ग) एक अंक की या दो अंकों की (गग) दो अंकों की या तीन अंकों की

(गगग) तीन अंकों की या चार अंकों की (ग्र) चार अंकों की या पाँच अंकों की

5. ाqनम्नांकित प्रत्येक संख्या के वर्गमूल में कितने अंक होंगें ?

(ग) 2304 (गग) 75625 (गगग) 166464

(ग्र) 32901696 (न) 64432729

2.7 दशमलव संख्या का वर्गमूल

पूर्ण वर्ग पूर्णांक संख्याओं की भाँति हम परिमेय संख्याओं के भी वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कर सकते हैं। इस विधि में पहले दी गई परिमेय संख्या को दशमलव संख्या में व्यक्त करते हैं, उसके बाद भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित तालिका को ध्यान से देखिए और रिक्त स्थानों की पूर्ति अपने अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए। यहाँ 3054.ज्हु एक दशमलव संख्या है।

$\left(\frac{-8}{7}\right)$ $\left(\frac{-4}{-5}\right)$ $\frac{112}{-105}$

0.3 0.09 $\frac{6}{-5}$ $-\frac{6}{5}$

0.5 0.25 $\left(\frac{5}{-2}\right)\times\left(\frac{-4}{1}\right)$ ...

0.41 0.1681 $\left(\frac{-3}{-8}\right)\times\left(\frac{0}{-9}\right)$ ± 0.4

4.1 ... $\sqrt{6\ .8}$ ...

7.5 ... $\sqrt{5\ .3}$ ...

1.25 1.5625 $\sqrt{\ldots}$ ...

36 = $\overline{2\times2}$ $\times\overline{3\times3}$

X3X3

उपर्युक्त से स्पष्ट है कि :

1. वर्ग परिमेय संख्या में दशमलव अंकों की संख्या सदैव सम होती है और उनके वर्गमूल में दशमलव अंकों की संख्या वर्ग संख्या में दशमलव अंकों की संख्या की आधी होती है ।

2. दशमलव संख्या के पूर्णांक भाग में पूर्व विधि से वर्गमूल के अंकों की गणना की जाती है ।

उदाहरण 28. 4.6225 का धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल :2.15

2 $\overline{4}.\overline{6}\ \overline{3}$

+2 4

41 62

+1 41

425 2125
2125

0

1. दशमलव से प्रारम्भ करके दाहिनी ओर प्रत्येक दो अंकों पर एक पड़ी रेखा खींचते हैं ।

2. पूर्णांक भाग में इकाई से प्रारम्भ करके बायाR ओर प्रत्येक दो अंकों के जोड़े पर एक पड़ी रेखा खींचते हैं । याfद सबसे बायाR ओर केवल एक अंक बचे तो उस पर भी पड़ी रेखा खींचते हैं।

3. याfद दशमलव अंक की संख्या सम नहीं है, तो सबसे दायाR ओर शून्य बढ़ाकर अंकों की संख्या सम करके पड़ी रेखा खींचते हैं ।

4. आगे की क्रिया भाग विधि से पूर्ण वर्ग संख्याओं के वर्गमूल निकालने के समान हैं ।केवल दशमलव अंक का पहला जोड़ा उतारने के पहले वर्गमूल में दशमलव का चिह्न लगा देते हैं।

उदाहरण 29. 0.00053361 के वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।
हल : 0.00053361 का वर्गमूल $= \sqrt{0.00053361}$

0.0231

2 $0.\overline{0}\ \overline{5}\ \overline{3}\ \overline{6}$

+2 4

43 133
+3 129

461 461
461

0

अत: $\sqrt{0.00053361} = 0.0231$ इस प्रकार 0.00053361 के वर्गमूल ± 0.0231 हैं।

2.8 ऐसी संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना जो पूर्ण वर्ग नहीं हैं

ऐसी दशा में याfद दी गयाr संख्या दशमलव भिन्न है अथवा उस रूप में व्यक्त की जा सकती है, तो अन्तिम अंक के आगे कुछ आवश्यक शून्य बढ़ाते हैं। परन्तु याfद संख्या दशमलव भिन्न में नहीं है, तो अन्तिम अंक के आगे दशमलव बिन्दु रखकर उसके बाद उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे कि वर्गमूल पूछे गये दशमलव के बाद के स्थानों तक ज्ञात किया जा सके ।

उदाहरण 30 . 0.9 का धन वर्गमूल दशमलव के दो स्थान तक निकटतम ज्ञात कीजिए ।
हल : पहले 9 के आगे उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे अंकों के तीन $(=2 \pm 1)$जोड़े बन सवेंâ ।
जैसे :
0. 948

9 $0.\overline{9}\,\overline{0}\,\overline{0}$
+9 81
184 900
+ 4 736
1888 16400
15104
1296

वर्गमूल के तीसरे स्थान पर 8 है जो कि 5 से बड़ा हैं ।अत: दशमलव के निकटतम दो स्थान तक शुद्ध उत्तर लिखने के लिए दूसरे स्थान के अंक को 1 बढ़ा देते हैं ।

अत: $\sqrt{0.9} = 0.9$

उदाहरण 31 . 1521.ज्हु का मान दशमलव के तीन स्थानों तक निकटतम ज्ञात कीजिए ।

हल: पहले 2 के बाद दशमलव रखकर इसके बाद उतने शून्य बढ़ाते हैं, जिससे अंकों के चार (·3±1)जोड़े बन सवेंâ।

1.4142
1 $\overline{2}.\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{0}$
+ 1 1
24 100
+ 4 96
281 400
+ 1 281
2824 11900
+ 4 11296
28282 60400
56564
3836

$\because$ वर्गमूल में दशमलव के चौथे स्थान पर 2 है जोकि 5 से कम है अत: दशमलव के तीन स्थान तक निकटतम वर्गमूल 1.414होगा ।

$\therefore \sqrt{2} = 1.414$

उदाहरण 32 . $0\frac{2}{3}$ का धन वर्गमूल दशमलव के निकटतम तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए ।

हल: $0\frac{2}{3} = \frac{2}{3} = 0.66666666....$

अत: $\sqrt{0\,2/3} = \sqrt{0.66666666}$

3.2659
3 $\overline{0}.\overline{6}\,\overline{6}\,\overline{6}\,\overline{6}$
+3 9
62 166

+2 124
646 4266
+ 6 3876
6525 39066
+5 32625
65309 644166
587781

56385

वर्गमूल में दशमलव के चौथे स्थान पर 9 है, जो कि 5 से अधिक है ।

अत: $\sqrt{10\frac{2}{3}} = 3.266$

उदाहरण 30, 31 एवं 32 के उत्तरों का अवलोकन करने पर हम देखते हैं कि

$\sqrt{.9} = 0.948.......$

$\sqrt{2} = 1.4142........$

$\sqrt{10\frac{2}{3}} = 3.2659....$

इस प्रकार सभी वर्गमूल परिमेय संख्याएं नहीं हैं क्योंकि वे भिन्न अथवा सान्त दशमलव द्वारा व्यक्त नहीं की जा सकती हैं ।
ऐसी संख्याएँ जो परिमेय नहीं होती हैं, अपरिमेय कहलाती हैं।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. 0.16 के वर्गमूल बताइए ?

2. 0.3 किस संख्या का वर्गमूल है ?

3. 0.5 किस संख्या का वर्गमूल है ?

अभ्यास 2(e)

1. निम्नांकित के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 84.8241 (ii) 150.0625 (iii) 477.4225

(iv) 225.6004 (v) 0.00008281

2. निम्नांकित प्रत्येक संख्या का धन वर्गमूल दशमलव के निकटतम तीसरे स्थान तक ज्ञात कीजिए :

(i) 1.7 (ii) 23.1 (iii) 5

(iv) 237.615 (v) 0.016

3. निम्नांकित प्रत्येक परिमेय भिन्न को दशमलव भिन्न में बदलकर उनके धन वर्गमूल दशमलव के निकटतम तीन स्थान तक ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{5}{12}$ (ii) $2\frac{1}{12}$ (iii) $287\frac{5}{8}$ (iv) $367\frac{2}{7}$

4. वह कौन सी दशमलव संख्या है, जिसे उसी दशमलव संख्या से गुणा करने पर गुणनफल 1227.8016 होता है ?

5. एक वर्ग का क्षेत्रफल 0.00037636 मी2 हैं ।वर्ग की भुजा की लम्बाई लगभग सेन्टीमीटर में ज्ञात कीजिए ।

6. याfo $\sqrt{2} = 1.4142$ तो $\sqrt{8}$ का मान दशमलव के निकटतम तीसरे स्थान तक ज्ञात कीजिए ।

दक्षता अभ्यास - 2

1. ज्ञात कीजिए कि क्या 5400 एक पूर्ण वर्ग संख्या है?

2. $\sqrt{4^2 - 0^2}$ का मान ज्ञात कीजिए :

3. गुणनखंड विधि से निम्नांकित के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 15876 **(ii)** 148225 **(iii)** 69696

4. धनात्मक वर्गमूल लेते हुए सरल कीजिए :

(i) $5^2 + (-5)^2$ **(ii)** $\sqrt{(5^2 + 2^2)}$

(iii) $0^2 + \sqrt{900}$ **(iv)** $\sqrt{400} + \sqrt{0.0} + \sqrt{0.000004}$

5.भाग विधि से निम्नांकित के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 4225 **(ii)** 75625 **(iii)** 3915380329

6. गुणनखंड विधि से निम्नांकित के धन वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{625}{121}$ **(ii)** $8\frac{139}{169}$ **(iii)** $2\frac{189}{289}$

7. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 9792 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण वर्ग हो जाता है ।

8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 3675 में भाग देने से भागफल पूर्ण वर्ग हो जाता है।

9. चार अंकों की छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए ।

10. चार अंकों की बड़ी से बड़ी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए ।

11. वह छोटी से छोटी पूर्ण वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए, जो 16, 18 और 45 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती है।

12. एक टोकरी में 1250 पूâल हैं । एक व्याfक्त किसी नगर के प्रत्येक मन्दिर में उतने ही पूâल चढ़ाता है, जितने कि उस नगर में मन्दिर हैं । याfद उसने कुल 8 टोकरी पूâल चढ़ाये हों, तो बताइए कि उस नगर में कुल कितने मन्दिर हैं ?

13. 15 अगस्त को कक्षा 6 की प्रत्येक छात्रा को उतने ही ग्राम मिङ्गाई दी गई, जितनी कि उस कक्षा में छात्राएँ थीं । याfद कुल 1.6 किलोग्राम मिङ्गाई बाँटी गई हो, तो ज्ञात कीजिए कि उस कक्षा में कुल कितनी छात्राएँ हैं और प्रत्येक छात्रा को कितने डेकाग्राम मिङ्गाई मिली ।

14. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 16160 में से घटाने पर शेषफल पूर्ण वर्ग हो जाता है ।

15. वह छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या ज्ञात कीजिए जिसे 594में जोड़ दें तो योगफल पूर्ण वर्ग हो जाता है।

16. एक वर्गाकार बाग को स्वच्छ, निर्मल एवं प्रदूषण मुक्त बनाने के लिए रख-रखाव पर प्रति वर्ग मीटर ` 2.25 मासिक व्यय आता हैं ।याfद बाग के रख रखाव पर मासिक व्यय ` 3600 हो तो बाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

17. स्वतंत्रता दिवस के अवसर पर बच्चों द्वारा एक गाँव में 289 व=क्ष लगाये गये। प्रत्येक क्यारी में उतने ही व=क्ष लगाये गये जितनी कुल क्यारियाँ थी तो प्रत्येक क्यारी में कितने व=क्ष लगाये गये?

हमने क्या चर्चा की ?

1. किसी संख्र्या े का वर्र्ग े2 होता है जिसका अर्र्थ े र्× े होता है।
2. शून्येतर पूर्णांकों के वर्ग धनात्मक पूर्णांक होते हैं।
3. x^2 के वर्गमूल $= \pm x$ जहाँ x पूर्णांक है।
4. शून्य का वर्ग शून्य तथा शून्य का वर्गमूल भी शून्य होता है।
5. वर्ग परिमेय संख्याओं के वर्गमूल परिमेय संख्याएँ होती हैं।
6. याfदे े कोई परिमेय संख्या हो ताs $y = x^2 \geq 0$ परिमेय संख्या को पूर्ण वर्ग संख्या कहते हैं।
7. याfद कोई संख्या पूर्ण वर्ग संख्या है तो उसके अभाज्य गुणनखंडों में समान खंडों के जोड़े बनाने पर कोई अभाज्य गुणनखंड शेष नहीं रहता।
8. समसंख्या का वर्ग सम संख्या तथा विषम संख्या का वर्ग विषम संख्या होती है।
9. किसी संख्या का वर्गमूल गुणनखंड विधि तथा भाग विधि से ज्ञात कर सकते हैं।
10. किसी पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या सम हो तो उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की आधी होती हैं ।पूर्ण वर्ग संख्या में अंकों की संख्या विषम होने की दशा में उसके वर्गमूल में अंकों की संख्या उसके अंकों की संख्या की उत्तरवर्ती संख्या की आधी होती है।
11. किसी संख्या के वर्गमूल के पूर्णांश में अंकों की संख्या भी क्रम 10 में दर्शायाr गयाr विधि से ज्ञात हो सकती है।
12. पूर्ण वर्ग पूर्णांक संख्याओं की भाँति हम परिमेय संख्याओं के भी वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कर सकते हैं।
13. ऐसी संख्याएँ जो परिमेय नहीं होती हैं, अपरिमेय कहलाती हैं।
14. जिन संख्याओं के वर्गमूल भिन्न अथवा सान्त दशमलव के रूप में व्यक्त नहीं किये जा सकते वे अपरिमेय संख्याएँ होती हैं।

उत्तर माला

अभ्यास 2 (a)

1. 9, 25, 49, 81, 121, 169; **2.** (i) 3136, (ii) 4225, (iii) 6724, (iv) 5625; **3.** (i) 25, (ii) $\frac{169}{289}$ (iii) $\frac{36}{49}$, (iv) $\frac{225}{361}$, (v) 15625, (vi) $\frac{8}{529}$.

अभ्यास 2 (b)

1. (i) ± 8, (ii) ± 108, (iii) ± 70, (iv) ± 217; **2.** (i) $\frac{23}{36}$, (ii) $1\frac{9}{14}$, (iii) $2\frac{1}{7}$, (iv) $4\frac{9}{1}$, (v) $\pm 8\frac{5}{7}$; **3.** 48;**4.** 81; **5.** 90; **6.** 210; **7.** 3.

अभ्यास 2(c)

1. (i) ± 6, (ii) ± 165, (iii) ± 222, (iv) ± 1111, (v) ± 2222, **2.** (i) $\pm \frac{9}{3}$, (ii) $\pm 5\frac{6}{7}$, (iii) $\pm 4\frac{8}{13}$, (iv) $\pm 3\frac{4}{15}$, (v) $\pm 4\frac{3}{7}$; **3.** 110; **4.** 40; **5.** 99856; **6.** 250.

अभ्यास 2 (d)

1. (iii) 4; **2.** (iv) 3; **3.** (iii) 4; **4.** (iii) तीन अंक या चार अंक की; **5.** (i) 2, (ii) 3, (iii)3, (iv) 4,
(v) 4.

अभ्यास 2 (e)

1. (i) 9.21, (ii) 12.25, (iii) 21.85, (iv) 15.02, (v) 0.0091; **2.** (i) 1.304, (ii) 4.806, (iii) 2.236, (iv) 15.415, (v) 0.126; **3.** (i) 0.645, (ii) 1.443, (iii) 16.960, (iv) 19.165; **4.** 35.04, **5.** 2 सेमी,
6. 2.828.

दक्षता अभ्यास 2

1. नहीं **; 2.** 9 **; 3.** (i) ± 126, (ii) ± 385, (iii) ± 264; **4.** (i) 50, (ii) 13, (iii) 930, (iv) 20.202; **5.** (i) 65, (ii) 275, (iii) 62573; **6.** (i) $2\frac{3}{1}$, (ii) $6\frac{3}{13}$, (iii) $5\frac{6}{7}$; **7.** 17; **8.** 3,
9. 1024; **10.** 9801; **11.** 3600; **12.** 100; **13.** 40 छात्राएं, 4डेकाग्रा; **14.** 31; **15.** 31. **16.** 40 मीटर **17.** 17.

इकाई - 3 घन और घनमूल

- **घन और घनमूल की संकल्पना**
- **पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करना (गुणनखंड विधि द्वारा)**
- **पूर्ण घन ऋण पूर्णांकों का घनमूल तथा दो पूर्ण घन पूर्णांकों के गुणनफल का घनमूल**
- **परिमेय संख्या का घनमूल, जिसका अंश और हर पूर्ण घन हो**
- **दशमलव संख्या, जो पूर्ण घन संख्या हो, का घनमूल (गुणनखंड विधि द्वारा)**
- **करणी, करणीगत राशि, करणी चिह्न तथा करणी का घातांक**
- **घनमूल का व्यावहारिक प्रश्नों में अनुप्रयोग**

3.1 भूमिका

आप पिछली कक्षा में घात और घातांक के विषय में पढ़ चुके हैं कि जब किसी संख्या को तीन बार ले कर उनका आपस में गुणा किया जाता है तो प्राप्त मान उस संख्या की तीन घात होती है।

आपको याद होगा कि

$2 \,^2\, 2 \,^2\, 2 \cdot 2^3 \cdot 8$

$3 \,^2\, 3 \,^2\, 3 \cdot 3^3 \cdot 27$

$5 \,^2\, 5 \,^2\, 5 \cdot 5^3 \cdot 125$

उपरोक्त संक्रिया को इन कथनों में व्यक्त किया जा सकता है कि 2 का घन 8 है, 3 का घन 27 है, 5 का घन 125 है। अर्थात् किसी संख्या का घन "उस संख्या की घात 3" होता है।

दैनिक जीवन में हम घन का प्रयोग किसी वस्तु का आयतन एवं धारिता ज्ञात करने तथा इनकी इकाई निर्धारण में करते हैं, जबकि घनमूल का उपयोग घनाकार वस्तुओं का आयतन ज्ञात होने पर इसकी एक भुजा की लम्बाई ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

आपने पिछले अध्याय में देखा है कि कुछ संख्याओं के पूर्ण वर्गमूल ज्ञात नहीं किया जा सकता है। इसी प्रकार कुछ संख्याओं के पूर्ण घनमूल भी नहीं निकाले जा सकते। अतः इस प्रकार के वर्गमूल या घनमूल करणी द्वारा व्यक्त किये जाते हैं। इस अध्याय में घन, घनमूल के साथ करणी का भी अध्ययन करेंगे।

3.2 घन और घनमूल की संकल्पना

घन - आइए घन ज्ञात करने की विधा को कुछ उदाहरण के माध्यम से समझें। आप जानते हैं कि

(1) $3 \,^2\, 3 \,^2\, 3 \cdot 3^3 \cdot 27$

(2) $(-5) \,^2\, (-5) \,^2\, (-5) \cdot (-5)^3 \cdot -125$

(3) $\left(\frac{2}{7}\right) \,^2\, \left(\frac{2}{7}\right) \,^2\, \left(\frac{2}{7}\right)^3 \cdot \frac{8}{343} \cdot \left(-\frac{9}{8}\right)$

(4) $\left(-\frac{9}{8}\right)2\left(-\frac{9}{8}\right)2\left(-\frac{9}{8}\right)^3 \cdot -\frac{729}{512} \cdot (x^3)$

(5) $m \times m \times m = m^3 = n$

अर्थात् एक परिमेय संख्या ह को पूर्ण घन तब कहते हैं, जब किसी परिमेय संख्या स् के लिए

$n = m \times m \times m$

$= m^3$ हो

3.3 पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ :

निम्नांकित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए-

प्राकृतिक संख्र्या े	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राकृतिक संख्या के घन 1139.ज्हुका मान	1	8	27 ...		...	...	...	...	...	1000

ध्यान दीजिये कि 1 से 1000 तक की संख्याओं में केवल दस संख्याएँ पूर्ण घन हैं। (जाँच करके देखिए)

इन्हें कीजिए :

अब 11 से 20 तक की संख्याओं के घन की सारणी बनाइए। सारणी को देखकर सम संख्याओं के घनों और विषम संख्याओं के घनों की सूची बनाकर निष्कर्ष निकालिए।

आप सूची को देखकर बता सकते हैं कि समसंख्याओं के घन सम संख्या और विषम संख्याओं के घन विषम संख्या होती हैं।

संख्या (x)	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
संख्या के घन	1331	1728	2197	2744	3375	4096	4913	5832	6889	8000
(x^3)का मान	विषम	सम	विषम	सम	विषम	सम	विषम	सम	विषम	सम

हम देखते हैं कि किसी प्राकृतिक संख्या का घन करने पर प्राप्त होने वाली संख्या भी एक प्राकृतिक संख्या है। इस प्रकार प्राप्त प्राकृतिक संख्याएँ पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ कहलाती हैं ।

Iqनष्कर्ष :

1. 1000 तक की पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ, क्रमशः 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 और 1000 हैं। अन्य प्राकृतिक संख्याएँ 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, ..., 999 पूर्ण घन संख्याएँ नहीं हैं ।

2. सबसे छोटी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या 1 है ।

3. कोई भी प्राकृतिक संख्या सबसे बड़ी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं कही जा सकती है, क्äयोंकि उससे भी बड़ी

प्राकृतिक घन संख्या लिखी जा सकती है। अतः प्राकृतिक पूर्ण घन संख्याएँ अनन्त हैं ।

4. **प्रत्येक प्राकृतिक संख्या का घन करने पर एक पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या प्राप्त होती है।**
5. **प्रत्येक प्राकृतिक संख्या पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या नहीं होती है ।**

प्रयास कीजिए :

- 1 पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या है, क्यों ?
- 216 किस प्राकृतिक संख्या का घन है ?
- 21, 31, 27 और 46 का घन लिखिए।
- 233, 293 और 263 का मान लिखिए।
- 4096, 5832 और 6859 का घनमूल ज्ञात कीजिए।
- क्या 0 पूर्ण घन संख्या है ?
- 1144.ज्हु और 1149.ज्हुके घन बताइए।

3.3.1 घन और उनके अभाज्य गुणनखण्ड

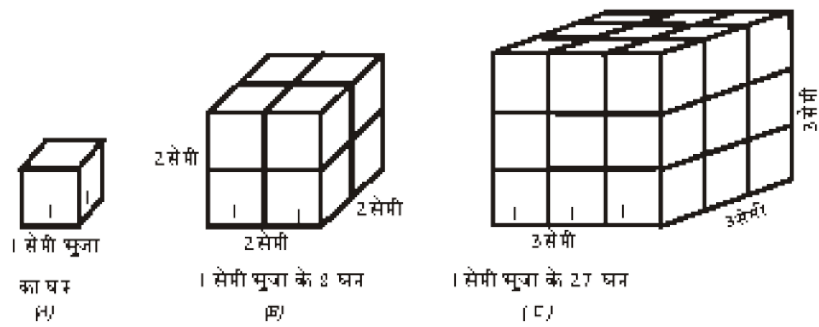
निम्नांकित सारणी को देखिए :

संख्या 2 3 $\frac{-5}{6}$ 0.1 0.5 8

संख्या के घन का मान $\frac{4}{125}$ 27 [illegible] 0.001 0.125

प्रयास कीजिए

- संख्या के 10 से छोटी होने पर उसके घन का मान 1000 से छोटा है अथवा बड़ा ?
- संख्या के 10 से बड़ी होने पर उसके घन का मान 1000 से छोटा है अथवा बड़ा ?
- 1 से 100 तक की पूर्ण घन प्राकृतिक संख्याएँ लिखिए ।
- 1 से 1000 तक की पूर्ण घन संख्याएँ कितनी हैं ?
- सबसे छोटी पूर्ण घन प्राकृतिक संख्या कौन सी है ?

3.3.2 घन का ज्यामितीय निरूपण

आपने ज्यामिति में पढ़ा है कि घन एक ऐसी ठोस आकृति है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, नीचे तीन घनों के चित्र बने हैं जिनके भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 1सेमी, 2सेमी और 3 सेमी हैं।

$\frac{1}{1000} = \frac{1}{0}\times\frac{1}{0}\times\frac{1}{0}$

ध्यान दीजिए :

चित्र (A) में एक 1 सेमी भुजा का घन है। चित्र (ँ) में एक 2 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 8 सेमी3 है और इसमें 1 सेमी भुजा के 8 घन है, चित्र (ण) में एक 3 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 27 सेमी3 है और इसमें 1 सेमी भुजा के 27 घन हैं।

3.4 घनमूल

हम जानते हैं कि

$8 = 2 ² 2 ² 2 = 2^3$

$-64 = (-4) ² (-4) ² (-4) = (-4)^3$

$\left(\frac{1}{0}\right)^3 . -\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

या $0.001 = 0.1 ² 0.1 ² 0.1 = (0.1)^3$

$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 . \frac{1}{0}$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि 2 का घन 8, (–4) का घन (–64), $\frac{1}{1000}$ का घन $\left(-\frac{1}{2}\right)$ या 0.1 का घन (0.001) तथा $\left(-\frac{1}{8}\right)$ का घन $\frac{1}{1000}$ है।

विलोमतः हम कह सकते हैं कि 8 का घनमूल 2, (–64) का घनमूल (–4), $\frac{1}{0}$ का घनमूल $\left(-\frac{1}{8}\right)$ या 0.001 का घनमूल 0.1 तथा $\left(-\frac{1}{2}\right)$ का घनमूलnw, $\sqrt[3]{8} = 2$ जिन्हें हम निम्न प्रकार से दर्शाते हैं-

$\sqrt[3]{-64} = -4$

$\sqrt[3]{\frac{1}{1000}} = \frac{1}{0}$

$\sqrt[3]{0.001} = 0.1$

या $\sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2}$

तथा $\sqrt{}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि वर्गमूल के चिह्न (1282.ज्हु) के ऊपर बार्ईं ओर ऊपर यदि हम संख्या 3 लिख देते हैं तो वह घनमूल चिह्न को प्रदर्शित करता है।

इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि यदि परिमेय संख्या q, परिमेय संख्या q का घनमूल है, तो

$p \cdot \frac{-125}{216}$ 3होगा।

प्रयास कीजिए :

1. 27 किस संख्या का घन है ?
2. 125 को आधार 5 के घातीय संकेतन के रूप में वैâसे लिखेंगे ?
3. $\frac{-8}{2}$ किस संख्या के घन का मान है ?
4. 0.001 किस संख्या को 3 बार लेकर आपस में गुणा करने से प्राप्त होगा ?

- किसी संख्या का घनमूल वह संख्या है जिसका घन करने पर मूल संख्या प्राप्त हो जाती है।
- एक परिमेय संख्या स्, परिमेय संख्या ह का घनमूल है, यदि स्3= ह
- यदि स्, ह का घनमूल है तो स् का घन ह है ।

प्रयास कीजिए :

निम्नलिखित संख्याओं का घनमूल निकालिये :

(i) 8 (ii) $\frac{-64}{1331}$ (iii) $3 \times 3 \times 3$

उदाहरण 1. क्या 243 एक पूर्ण घन है ?

हल : $243 \cdot 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

यहाँ 3 का ित्रक बनाने पर 3 ² 3 शेष रहता है अतः 243 पूर्ण घन नहीं है।

उदाहरण 2. क्या 729 पूर्ण घन संख्या है ?

हल : $729 \cdot 3 \times 3 \times 3 \;2\; \frac{1}{5}$

तीन तीन का समूह बनाने पर कोई गुणनखंड शेष नहीं है।

अत : 729 पूर्ण घन संख्या है।

निम्न पर सामूहिक चर्चा कीजिए :

1. किस संख्या का घन 64है?

2. $\sqrt[3]{\frac{6}{3}}$ का घन बताइए।

3. 0.1 का घन बताइए।

4. निम्नांकित कथनों में से छाँट कर सत्य या असत्य बताइए :

(i) $= \frac{2}{5} \sqrt[3]{0\ ,0\ ,000} = 100$

(ii) $\frac{-5}{9}$

(iii) 1 पूर्णघन नहीं है।

अभ्यास 3 (a)

1. निम्नलिखित संख्याओं के घन ज्ञात कीजिए -

7, 12, 17, 19, 21, 100

2. $\frac{3}{8}$ का घन है :

(i) $\frac{-3}{8}$ **(ii)** $\frac{125}{729}$ **(iii)** $\frac{-125}{729}$ **(iv)** $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3,$

3. निम्नलिखित में से कौन सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं :

64, 216, 243, 900, 1728, 106480, 363000

2 1728
2 864
2 432
2 216
2 108
2 54
3 27
3 9
3

3.4.1 पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल (गुणनखंड विधि द्वारा)

देखिए,

(i) $\sqrt[3]{27} = 3 \quad 2\times2\times2\times3\times3\times3$

(ii) $216 = 2^3 \times 3^3$

$= (2\times3)^3$

$= \sqrt[3]{216} = 2\times3$

अत: $216 = \overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3} = 6$

या, $\sqrt[3]{216} = 2\times3 = 6$

अत: $1728 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3$

(iii) $= 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

$= (2\times2\times3)^3$

$\sqrt[3]{1728} = 2\times2\times3$

अत: $= 12$

$157464 \quad = \quad \overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}$

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी पूर्णघन संख्या का घनमूल ज्ञात करने के लिए वह संख्या ज्ञात करनी चाहिए जिसका घन करने पर उक्त संख्या प्राप्त हो जाय ।

प्रयास कीजिए :

- उपर्युक्त विधि से 2744, 4096, 8000 तथा 91125 के घनमूल ज्ञात कीजिए ।

इस प्रकार पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करने के लिए निम्नांकित क्रिया-पद का अनुसरण करना चाहिए :

1. सर्वप्रथम दी हुई संख्या के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए ।

2. समान गुणनखंडों के 3-3 के समूह (त्रिक) बनाइए ।

3. प्रत्येक त्रिक से एक गुणनखंड लीजिए ।

4. इन गुणनखंडों का आपस में गुणा कीजिए ।

5. प्राप्त गुणनफल दी हुई संख्या का अभीष्ट घनमूल होगा ।

टिप्पणी : ध्यान दें, संख्याएँ तभी पूर्ण घन होती हैं जब उनके अभाज्य गुणनखंडों में समान गुणनखंडों के सभी संभव त्रिक (ऊrग्ज्त्रृ) बनाने के पश्चात् कोई भी गुणनखंड शेष न रहे अन्यथा वह संख्या पूर्ण घन नहीं होगी ।

उदाहरण 3. 157464का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

2 157464
2 78732
2 39366
3 19683
3 6561
3 2187
3 729
3 243
3 81
3 27
3 9
3

nue : $\sqrt[3]{157464} = 2\times3\times3\times3$

अत: $43200 = \overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times5\times5$

= 54

उदाहरण 4. 43200 को पूर्ण घन बनाने के लिए इसमें किस छोटी से छोटी संख्या का गुणा करना चाहिए? इस प्रकार प्राप्त पूर्ण घन संख्या का घनमूल भी ज्ञात कीजिए ।

हल

2 43200
2 21600
2 10800
2 5400
2 2700
2 1350
3 675
3 225
3 75
5 25
5

हम देखते हैं कि समान गुणनखंडों के 3-3 के समूह (त्रिक) बनाने पर 51465.ज्हु5 बच जाता है। अत: याfद एक और 5 का दी हुई संख्या में गुणा कर दिया जाय तो वह संख्या पूर्ण घन बन जायेगी। अतः गुणा की जाने वाली संख्या =5

इस प्रकार प्राप्त पूर्ण घन संख्या =43200= $\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{5\times5\times5}$ 5=216000

अब 216000 · $\sqrt[3]{216000} = 2\times2\times3\times5 = 60$

अत: $13122 = 2\times3\times3\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}$

उदाहरण 5. 13122 में किस छोटी से छोटी संख्या का भाग दें कि भागफल पूर्ण घन बन जाय ? इस प्रकार प्राप्त संख्या का घनमूल भी ज्ञात कीजिए ।

हल $2\times3\times3$

यहाँ समान गुणनखंडों के 3 – 3 के समूह (त्रिक) बनाने के बाद तीन गुणनखंड 2, 3, 3 बच जाते हैं । अत : दी हुई संख्या में याfद 1491.ज्हु1496.ज्हु का भाग दे दें तो भागफल पूर्ण घन होगा ।

इस प्रकार भाजक संख्या और

प्राप्त संख्या 1506.ज्हु

3.4.2 पूर्ण घन ऋण पूर्णांकों का घनमूल :

देखिए,

अत:

$\sqrt[3]{-8} = -2$ अत: $(-3)^3 = (-3)\times(-3)\times(-3) = -27$,

$\sqrt[3]{-27} = -3$ अत: $(-4)^3 = (-4)\times(-4)\times(-4) = -64$,

$\sqrt[3]{-64} = -4$ अत: $(-x)^3 = (-x)\times(-x)\times(-x) = -x^3$

इसी प्रकार याfद (-x) एक ऋण पूर्णांक हो, तो

$\sqrt{0\ 2/3} = \sqrt{0.66666666}$

अत:

• इसी प्रकार याfद (-x) एक ऋण पूर्णांक हो, तो $\sqrt[3]{-x^3} = -x = -\sqrt[3]{x^3}$ है ।

इस प्रकार यह निष्कर्ष निकलता है कि

पूर्ण घन ऋण पूर्णांक का घनमूल ऋण पूर्णांक होता है। इसे पूर्ण घन ऋण पूर्णांक के निरपेक्ष मान के घनमूल के पूर्व ऋण चिह्न लगाकर प्राप्त किया जा सकता है, संकेत रूप में

$2197 = \overline{13 \times 13 \times 13}$

उदाहरण 6. -2197 का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

-2197 का घनमूल

ज्ञात कीजिए

हल हम देखते हैं कि

$\therefore \sqrt[3]{2197} = 13$

$\sqrt[3]{-2197} = -\sqrt[3]{2197}$

अत : $= -13$ $\sqrt[3]{27 \times 64}$

3.4.3 दो पूर्ण घन पूर्णांकों के गुणनफल का घनमूल :

• देखिए,

उदाहरण 7. निम्न में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए और उत्तर पर ध्यान दीजिए

(क) $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$

(ख) $\sqrt{2} = 1.4142$

हल (क) $\sim\sqrt{8}$

$\sqrt{4^2 - 0^2}$

$\sqrt[3]{27 \times 64} = \sqrt[3]{\overline{3\times3\times3}\times\overline{4\times4\times4}}$

$\sqrt[3]{27} = 3$

· 3 × 4

= 12

(ख) $\sqrt[3]{64} = 4$ और $\sqrt[3]{27} \times \sqrt[3]{64}$

· 3 ² 4 =12

दोनों दशाओं में समान उत्तर है।

इसी प्रकार,

$\sqrt[3]{8} = 2$, अत : $27 = \overline{3\times3\times3} = 3^3$,

x^2 अत : $=$ $\pm x$

अब ≥ 0

अत : $\sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}} = 2\times3 = 6$

$\sqrt[3]{8\times27} = 6 = 2\times3 = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}$

अत : $\sqrt[3]{8\times27} = \sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{27}$

अर्थात् $-64 = -(\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2})$

पुनः देखिए,

उदाहरण 8 $\sqrt[3]{-64} = -(\overline{2\times2}) = -4$ अतः $729 = \overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3},$

$\sqrt[3]{729} = 3\times3 = 9$ अतः $\sqrt[3]{-64\times729}$

अब

$\sqrt[3]{(-64)\times729} = -\sqrt[3]{\overline{2\times2\times2}\times\overline{2\times2\times2}\times\overline{3\times3\times3}\times\overline{3\times3\times3}} = -2\times2\times3\times3$

$= -36$

$= -4\times9$

$\sqrt[3]{-64} \times \sqrt[3]{729}$

$\sqrt[3]{-64\times729} = \sqrt[3]{-64}\times\sqrt[3]{729}$

=– 4 ² 9

=– 36

अतः $\sqrt[3]{125\times216} = \sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{216}$

प्रयास कीजिए :

(i) $\sqrt[3]{343\times512} = \sqrt[3]{343}\times$

(ii) $\sqrt[3]{512}$ $\sqrt{4}$

इस प्रकार निष्कर्ष निकलता है कि :

याfद a और b दो पूर्ण घन पूर्णांक हों, तो

1801.ज्हु

उदाहरण 9. (-125) $\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{125} = -\sqrt[3]{5\times5\times5} = -5$ (-2744) का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल $\sqrt[3]{-2744} = -\sqrt[3]{2744} = -\sqrt[3]{2\times2\times2\times7\times7\times7}$

और $= -(2\times7) = -14$

$\sqrt[3]{(-125)\times(-2744)} = \sqrt[3]{-125}\times\sqrt[3]{-2744}$

अत : $= (-5)\times(-14)$

$= 70$

$\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{5}{6}$

अभ्यास 3 (b)

1. 8 तथा – 8 के घनमूलों में कौन बड़ा है ?
2. 32 को किस लघुतम पूर्ण संख्या से गुणा करें कि गुणनफल पूर्णघन हो जाय ?

3. निम्नांकित में से कौन-सी संख्याएँ पूर्ण घन हैं ?

(i) 432 **(ii)** 729 **(iii)** 13824 **(iv)** 42875
(v) 4608 **(vi)** 1125 **(vii)** 10976 **(viii)** 5832

4.निम्नांकित संख्याओं के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 2744 **(ii)** 74088 **(iii)** 74088000 **(iv)** 134217728
(v) -2197 **(vi)** -10648 **(vii)** -64000 **(viii)** -17576

5. 2096 में किस छोटी से छोटी संख्या का भाग दें कि भागफल पूर्ण घन बन जाय?

6. 281216 में किस लघुतम पूर्ण संख्या का भाग दें कि भागफल पूर्ण घन हो जाय ?

7. 9000 में किस लघुतम प्राकृतिक संख्या का गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन बन जायेगा ?

8. 83349 में किस छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या का गुणा करें कि गुणनफल पूर्ण घन बन जाय? प्राप्त इस नयाr संख्या का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

9. (-15625) $\times$512 का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

10. 1331 $\sqrt[3]{125\times 343}$ (-1728) का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

11. $\frac{343}{512}=\frac{7\times 7\times 7}{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2}$ का मान है :

(i) 35 **(ii)** 45 **(iii)** 75 **(iv)** 105

3.4.4 परिमेय संख्या, जिसका अंश और हर पूर्ण घन हो, का घनमूल देखिए,

$$=\frac{7^3}{2^3\times 2^3\times 2^3}$$

$$=\frac{7^3}{8^3}=\left(\frac{7}{8}\right)^3$$

अत : $\frac{-125}{1728}=\frac{(-5)\times(-5)\times(-5)}{2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 3\times 3\times 3}$

पुन:देखिए,

$$=\frac{(-5)^3}{2^3\times 2^3\times 3^3}$$

$$=\frac{(-5)^3}{(2\times 2\times 3)^3}$$

$$=\frac{(-5)^3}{(12)^3}=\left(\frac{-5}{12}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{\frac{-125}{1728}}$$

अत : $=\frac{-5}{12}$ $\frac{-125}{1331}$

इन्हें देखिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

• अंश तथा हर के अभाज्य गुणनखंड करके दिखाइए कि निम्नांकित परिमेय संख्याएँ पूर्ण घन संख्याएँ हैं, तथा इस प्रकार इनका घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{64}{125}$ **(ii)** $\frac{216}{343}$ **(iii)** $\frac{27}{125} = \frac{3\times3\times3}{5\times5\times5} = \left(\frac{3}{5}\right)^3$

देखिए,

$\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$

अत : $= \frac{3}{5}$ $27 = 3\times3\times3 = 3^3$

पुन : $\sqrt[3]{27} = 3$

अत : $125 = 5\times5\times5 = 5^3$

इसी प्रकार $\sqrt[3]{125} = 5$

अत : $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$

अत : $= \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$ $\sqrt[3]{\frac{512}{1000}}$

प्रयास कीजिए :

सत्यापित कीजिए

(i) $= \frac{\sqrt[3]{512}}{\sqrt[3]{1000}}$ $\sqrt[3]{\frac{-729}{1331}}$ **(ii)** $= \frac{\sqrt[3]{-729}}{\sqrt[3]{1331}}$ $\frac{a}{b}$

निष्कर्ष :

यादि a एक परिमेय संख्या हो, जहाँ $b \neq 0,$ **और सह-अभाज्य पूर्ण घन पूर्णांक हैं तथा** $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ **तो** $= \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $(0.6)^3 = \left(\frac{6}{10}\right)^3 = \frac{6}{10}\times\frac{6}{10}\times\frac{6}{10} =$

3.4.5 दशमलव संख्या, जो पूर्ण घन संख्या हो, का घनमूल (गुणनखंड विधि द्वारा)

देखिए,

• $\frac{6\times6\times6}{10\times10\times10} = \frac{216}{1000} = 0.216$ $(0.6)^3 = 0.216$

अर्थात् $\sqrt[3]{0.216} = 0.6$

अत : $(1.2)^3 = \left(\frac{12}{10}\right)^3 = \frac{12}{10}\times\frac{12}{10}\times\frac{12}{10} = \frac{1728}{1000} = 1.728$

• इसी प्रकार,

$\sqrt[3]{1.728} = 1.2$

अत : $\sqrt[3]{0.216} =$

हम जानते हैं कि दशमलव संख्या को साधारण भिन्न में बदल सकते हैं, अत: याfद हमें 0.216का घनमूल ज्ञात करना है, तो हम इसे निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं-

$$\sqrt[3]{\frac{216}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{216}}{\sqrt[3]{1000}} \frac{\sqrt[3]{2\times2\times2\times3\times3\times3}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}} = \frac{2\times3}{10}$$

$$. = \frac{6}{10} = 0.6$$

$$\sqrt[3]{0.216} = 0.6$$

अत : $\sqrt[3]{1.728} =$

इसी प्रकार,

$$\sqrt[3]{\frac{1728}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{1000}} \frac{\sqrt[3]{2\times2\times2\times2\times2\times2\times3\times3\times3}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}}$$

$$. = \frac{2\times2\times3}{10} = \frac{12}{10} = 1.2$$

$$\sqrt[3]{1.728} = 1.2$$

अत : $\sqrt[3]{0.027} = 0.3$

प्रयास कीजिए :

• दिखाइए कि : 0.008

• $29\frac{791}{1000}$ का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

उदाहरण 10. $29\frac{791}{1000} = \frac{29791}{1000} = \frac{31\times31\times31}{10\times10\times10}$ का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

हल $\sqrt[3]{29\frac{791}{1000}}$

अत : $= \frac{\sqrt[3]{31\times31\times31}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}} = \frac{31}{10}$

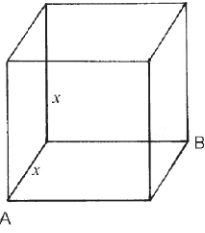
3.1 अथवा $\frac{15625}{1000}$

संयुक्त भिन्न को विषम भिन्न में बदल कर घनमूल ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 11. 15.625 का घनमूल ज्ञात कीजिए ।

हल 15.625 · $\sqrt[3]{15.625} =$

अत : $\sqrt[3]{\frac{15625}{1000}} = \frac{\sqrt[3]{5\times5\times5\times5\times5\times5}}{\sqrt[3]{10\times10\times10}} = \frac{5\times5}{10} = \frac{25}{10} = 2.5$

3.5 घन का आयतन और उसकी भुजा में सम्बन्ध :

हम जानते हैं कि घन वह घनाभ होता है जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई आपस में बराबर होती हैं। अर्थात् घन की भुजाएँ या कोरें बराबर माप की होती हैं। हम यह भी जानते हैं कि याfद किसी घन की भुर्जा ़े और उसका आयतन हो, तो$V = x \times x \times x = x^3$

$V = x^3$

अर्थात् घन का आयतन उसकी भुजा के घन के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, घन की भुजा उसके आयतन के घनमूल के बराबर होती है।

इस प्रकार, $x = \sqrt[3]{V}$

या, $\sqrt[3]{}$

अर्थात्

घन का आयतन= (घन की भुजा)3

घन की भुजा= 2199.ज्हुघन का आयतन

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. $\frac{64}{125}$ का घनमूल बताइए । 3. .001 का घनमूल क्या होगा?

2. $\frac{729}{1331}$ का घनमूल ाIqकतना होगा? 4. .027 का घनमूल बताइए।

अभ्यास 3 (c)

1. निम्नांकित का घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{512}{3375}$ **(ii)** $\frac{1728}{15625}$ **(iii)** $5\frac{43}{64}$ **(iv)** $1\frac{91}{125}$

(v) $2\frac{161}{216}$ **(vi)** $\frac{27}{64}$

2.निम्नांकित दशमलव संख्याओं का घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 1.331 **(ii)** 42.875 **(iii)** 54.872

(iv) 74.088 **(v)** 5.832 **(vi)** 0.000729

प्रश्न 3 से लेकर 5 तक में उत्तरों के सही विकल्प अपनी उत्तर पुस्तिका में लिखिए:

3. $\frac{2}{3}$ का घनमूल है :

(i) $\frac{3}{4}$ **(ii)** $\frac{3}{8}$

(iii) $\frac{9}{6}$ **(iv)** $3\frac{3}{8}$

4. $\frac{3}{8}$ का घनमूल है :

(i) 3 **(ii)** $1\frac{1}{2}$

(iii) $\frac{3}{4}$ **(iv)**

5. 0.000008 का घनमूल है :

(i) 0.2 **(ii)** 0.02

(iii) 0.002 **(iv)** 0.004

6. एक घनाकर कम्पोस्ट खाद के गड्ढे का आयतन 13.824मी3 है। गड्ढे की गहराई ज्ञात कीजिए।

7. एक घनाकार बक्से का आयतन 8000 सेमी3 है। इसकी एक भुजा ज्ञात कीजिए।

3.6 घनमूल का व्यावहारिक प्रश्नों में अनुप्रयोग :

भवन-निर्माण, वस्तुओं की पैविंâग, पानी की टंकियों के निर्माण, सजावट आदि दैनिक जीवन की ऐसी अनेक समस्याएँ हैं जिनका समाधान ढूँढ़ने में घनमूल का ज्ञान उपयोगी सिद्ध हो सकता है। निम्नांकित उदाहरणों द्वारा ये बातें स्पष्ट की जा रही हैं ।

उदाहरण 12 : एक धातु की ठोस आयताकार सिल्ली की माप 10 सेमी ² 4सेमी ² 1.6 सेमी है। इसको पिघलाकर एक दूसरी ठोस घनाकार सिल्ली बनायाr जाती है। बताइये कि इस नयाr सिल्ली की भुजा की माप कितनी होगी।

हल : आयताकार सिल्ली का आयतन =लम्बाई ² चौड़ाई ² ऊँचाई

· 10 ² 4 ² 1.6 · 64 सेमी3

याfद एक नई घनाकार सिल्ली की एक भुर्जा े सेमी हो तो

इसका आयतन $= x \times x \times x$ सेमी3

प्रश्नानुसार $x^3 = 64$

×

अतः नयाr सिल्ली की भुजा 4सेमी होगी।

उदाहरण 13. एक फल-निर्यातक घनाकार पेटियों में सेबों की पैविंâग इस प्रकार कराता है कि एक पंक्ति में जितने सेब रखे जाते हैं, पेटी में सेबों की उतनी ही पंक्तियाँ हैं तथा सेबों की उतनी ही तहें भी रखी जाती हैं। याfद एक पेटी में 3375 सेब रखे गये हों तो ज्ञात कीजिए कि प्रत्येक पंक्ति में कितने सेब रखे गये हैं ?

हल चूँकि पेटी में प्रत्येक पंक्ति में जितने सेब रखे गये हैं, सेबों की उतनी ही पंक्तियाँ तथा उतनी ही तहें हैं, अतः याfद एक पंक्ति में े सेब रखे गये हों तो पेटी में रखे गये

सेबों की संख्या · $x \times x$ √ $x = x^3$

प्रश्नानुसार पेटी में 3375 सेब रखे गये हैं,

चूँकि

अत: $\sqrt[3]{3\times3\times3\times5\times5\times5}$

$= 3\frac{920}{1331}$

$= 3 \times 5$

= 15

अत: प्रत्येक पंक्ति में 15 सेब रखे गये हैं ।

विशेष :कुछ संख्याएँ ऐसी हैं जिन्हें दो घनों के योगफल के रूप में दो भिन्न प्रकार से लिखा जाता है। 1729 ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योगफल के रूप में केवल दो प्रकार से लिखा जा सकता है। इसे रामानुजन हार्डी संख्या कहते हैं।

$$1729 \cdot 1728 \pm 1 \cdot 12^3 \pm 1^3$$
$$1729 \cdot 1000 \pm 729 \cdot 10^3 \pm 9^3$$

इसे जानें

हार्डी रामानुजन संख्या 1729

एक बार प्रोपेâसर जी.एच.हार्डी रामानुजन से मिलने गये। उस समय रामानुजन अपनी बीमारी के इलाज के लिये अस्पताल में भर्ती थे। बातें करते समय हार्डी ने रामानुजन से कहा मैं जिस टैक्सी से आया हूँ उसका नम्बर 1729 था, और यह एक शुभ संख्या नहीं है। रामानुजन ने तुरन्त उत्तर दिया – नहीं यह एक रोचक (ग्ह्रीग्रहु) संख्या है। उन्होंने बताया कि यह ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योग के रूप में दो प्रकार से लिखा जा सकता है। तब से इस संख्या 1729 को ‘हार्डी रामानुजन संख्या’ कहा जाने लगा। रामानुजन इस विशेषता की खोज उसी समय कर चुके थे जब वह मैट्रिक में थे।

अभ्यास 3 (ृ)

1. एक पेटी में सेब इस प्रकार रखे गये हैं कि प्रत्येक तह की प्रत्येक पंक्ति में उतने ही सेब हैं जितनी उस तह में पंक्तियाँ हैं। याfद तहों की कुल संख्या पंक्तियों की संख्या के समान हो तथा पेटी में कुल 1728 सेब रखे गये हों, तो प्रत्येक तह में कितने सेब रखे गये हैं ?

2. एक पेटी में 216 आम घन के रूप में सजाकर रखे गये हैं। ज्ञात कीजिए कि पेटी में आम की कितनी तहें हैं ?

3. एक सन्दूक में चाक के डिब्बे घन के रूप में रखे गये हैं। याfद कुल डिब्बों की संख्या 2744हो, तो सन्दूक में एक तह में चाक के कितने डिब्बे हैं।

4. एक शोरूम में कांच के रंगीन घन एक दूसरे से सटाकर इस प्रकार रखे गये हैं कि वे एक बड़े घन का आकार ले लेते हैं। याfद इस प्रकार रखे गये रंगीन घनों की कुल संख्या 512 हो, तो ज्ञात कीजिए कि रंगीन घनों की कितनी तहों से उक्त घनाकृति बनी है ।

5. प्रधानमंत्री के राष्ट्रीय राहत कोष के लिए एक विद्यालय की एक कक्षा का प्रत्येक विद्यार्थी उस कक्षा के विद्यार्थियों की संख्या के वर्ग के बराबर पैसे चन्दे में देता है। इस प्रकार याfद कुल चन्दे की धनराशि रु0 15625 हो तो उस कक्षा में कुल कितने विद्यार्थी हैं ?

6. एक घनाकार टंकी में 1331 लीटर पानी आता है। टंकी की माप ज्ञात कीजिए याfद 1000 लीटर पानी का आयतन 1 घन मीटर के बराबर होता है?

दक्षता अभ्यास - 3

1.र् े का मान ज्ञात कीजिए याfद :

$10^3 \pm x^3 = 1^3 \pm 12^3$

2.निम्नांकित के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 250047 **(ii)** 110592
(iii) 1404928 **(iv)** 1771561

3. निम्नांकित के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) $1\frac{13084}{29791}$ **(ii)** $3\frac{2042}{3375}$

(iii) $132\frac{651}{1000}$ **(iv)** ×

4. निम्नांकित के घनमूल ज्ञात कीजिए :

(i) 226.981 **(ii)** 0.373248
(iii) 0.000884736 **(iv)** 0.000001157625

5. उस ठोस धात्विक घन की कोर क्या होगी जिसे पिघलाकर 3 सेमी, 4सेमी और 6 सेमी कोर के तीन ठोस घन बनाये जा सकते हैं?

6. दो ठोस धात्विक घनों की कोरें क्रमश 9 सेमी एवं 10 सेमी हैं। उनकों पिघलाकर उनके संयुक्त द्रव्यमान से 1 सेमी3 आयतन के बराबर द्रव्यमान निकालकर अवशेष से एक नया ठोस घन बनाया जाता है। इसकी कोर ज्ञात कीजिए।

7. वह छोटी से छोटी पूर्ण संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 963144में भाग देने पर भागफल पूर्ण घन बन जाय।

8. 26244में किस छोटी से छोटी प्राकृतिक संख्या का गुणा करें कि गुणनफल पूर्ण घन बन जाय?

9. अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कर बताइए कि क्या 2097152 पूर्ण घन है ?

10. 6028.568 सेमी3 आयतन वाले घनाकार गैस चैम्बर की भुजा ज्ञात कीजिए ।

11. एक घनाभ की माप 98 सेमी 2341.ज्हु42 सेमी $(-343 \times 512)^{\frac{1}{3}}$ 18 सेमी है इसके आयतन के बराबर आयतन वाले घन की भुजा ज्ञात कीजिए ।

12. एक बाक्स में काँच की 42875 गोलियाँ घन के रूप में रखी गयाr हैं। बाक्स में गोलियों की कितनी तहें होंगी ?

प्रश्न 13 से लेकर 19 तक में उत्तर के दिये गये विकल्पों में से सही विकल्प छाँट कर लिखिए

13. एक घन का आयतन 6859 सेमी3 है। उसकी कोर है :

(ग्) 13 सेमी (ग्ग्) 15 सेमी (ग्ग्ग्) 17 सेमी (ग्न्) 19 सेमी

14. $\sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2$ का मान है :

(i) -56 **(ii)** -42 **(iii)** -84 **(iv)** 56

15. 12,18 और 25 से पूर्णत: विभाज्य छोटी से छोटी पूर्णघन संख्या है :

(i) 1200 **(ii)** 1800 **(iii)** 2700 **(iv)** 27000

16.वह छोटी से छोटी संख्या जिसका 10,000 में गुणा करने पर गुणनफल पूर्ण घन बन जाता है, निम्नांकित होगी :

(i) 10 **(ii)** 25 **(iii)** 100 **(iv)** 800

17.वह छोटी से छोटी संख्या जिसका 8192 में भाग देने पर भागफल पूर्ण घन बन जाता है, निम्नांकित होगी:

(i) 2 **(ii)** 4 **(iii)** 16 **(iv)** 32

18. $\sqrt{441} = 3 \times 7$ का मान होगा

(i) $2\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt{3}$ (iii) 0 (iv) $2^n - 2^{n-1} = 4$

19. याfद n^n तो $\frac{3}{2}$ का मान होगा

(i) 1 (ii) (iii) 2 (iv) 27

(एन.टी.एस. - 2006)

20. एक घनाकार सन्दूक का भीतरी आयतन 32.768 मी3 है। उसकी भीतरी भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

21. एक विद्यालय की प्रत्येक कक्षा में घनाकार वूâड़ादान (डस्टबिन) रखा गया, जिसका आयतन 27000 घन सेमी है तो वूâड़ेदान की एक भुजा ज्ञात कीजिए।

22. एक बाग के कोने में बाग की साफ-सफाई से निकले खरपतवार से कम्पोस्ट खाद तैयार करने के लिए एक घनाकार गड्ढा खोदा गया है। गड्ढे से खोदी गयाr मिट्टी का आयतन 10^3 बढ़ जाता है जिसे किसी ट्रैक्टर ट्राली में उसकी धारिता के अनुसार ठीक-ठीक भरकर कुल 5 बार में बाग से बाहर ले जाया जा रहा है। याfद ट्राली की माप 2.75 मी0 ² 2 मी0 ² 0.625 मी0 हो तो खोदे गये गड्ढे की गहराई ज्ञात कीजिए।

हमने क्या चर्चा की ?

1. किसी संख्या का घनमूल वह संख्या है जिसका घन करने पर वह संख्या प्राप्त हो जाती है।
2. पूर्ण घन संख्याओं का घनमूल, गुणनखंड विधि से अभाज्य गुणनखंडों के 3-3 के त्रिक बनाकर, प्रत्येक त्रिक से एक-एक गुणनखंड लेकर उनका आपस में गुणा कर ज्ञात करते हैं।
3. दैनिक जीवन में संबंधित अनेक व्यावहारिक प्रश्नों को हल करने में घनमूल का अनुप्रयोग करते हैं।

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-64} = -4$

$= -\sqrt[3]{x^3}$

$\sqrt[3]{-x^3} = -x$

सेबों की संख्या · $x \times x \times x = x^3$

प्रश्नानुसार पेटी में 3375 सेब रखे गये हैं,

$\therefore x^3 = 3375$

उत्तर माला

अभ्यास 3 (a)

1. 243, 1728, 4913, 6859, 9261, 1000000, **2.** (iv) $-\frac{125}{729}$, **3.** 64, 216,1728,

अभ्यास 3 (b)

1. 8 का घनमूल ; **2.** 2; **3.** (ii) 729, (iii) 13824, (iv) 42875, (viii) 5832; **4.** (i) 14, (ii) 42,
(iii) 420, (iv) 512, (v) -13, (vi) -22, (vii) -40, (viii) -26; **5.** 262; **6.** 2; **7.** 3; **8.** 3, 63; **9.** -200; **10.** -132; **11** (i) 35;

अभ्यास 3 (c)

1. (i) $\frac{9}{1}$, (ii) $\frac{8}{5}$, (iii) $\frac{a}{b}$, (iv) $\frac{c}{d}$, (v) $\frac{p}{q}$, (vi) $\frac{r}{q}$; **2.** (i) 1.1, (ii) 3.5, (iii) 3.8, (iv) 4.2, (v) 1.8, (vi) 0.09; **3.** (ii) $\left(\frac{-1}{2}\right)$; **4.** (iii) $\left(\frac{-8}{19}\right)$; **5.** (ii) 0.02; **6.** 2.4 मी; 7. 20 सेमी।~

अभ्यास 3 (d)

1. 144 सेब; 2. 6 तहें; 3. 196 डिब्बे; 4. 8 तह; 5. 25 विद्यार्थी; 6. घनाकार टंकी की भुजा 1.1मी है।

दक्षता अभ्यास 3

1. 9; **2.** (i) 63, (ii) 48, (iii) 112, (iv) 121; **3.** (i) $\left(\frac{-1}{2}\right)$, (ii) $\left(\frac{-8}{19}\right)$, (iii) $\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot\left(\frac{-8}{19}\right)$, (iv) $\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{8}{19}$; **4.** (i) 6.1, (ii) 0.72, (iii) 0.096, (iv) 0.0105; **5.** 6 सेमी।; **6.** 12 सेमी।; **7.** 13; **8.** 6; **9.** neB, 128का घन है; **10.** 18.2 सेमी।; **11.**42 सेमी।; **12.** 35 तहें; **13.** (iv) 19 सेमी।; **14.** (i) -56; **15.** (iv) 27000; **16.** (iii) 100; **17.** (i) 2; **18.** (iii) 0; **19.** (iv) 27; **20.** 3.2मी;**21.** 30 सेमी।; **22.** 2.5 मीटर

इकाई - 4 सर्व समिकाएँ

सर्व समिकाएँ

- $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$
- $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$
- $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

सर्वसमिकाआें का अनुप्रयोग

4.1 भूमिका

पिछली कक्षाआें में हमने पüढा है कि ऐसा बीजीय संबंध जो चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है, सर्वसमिका कहलाता है। हमने द्विपदीय तथा द्विघातीय जõसे $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)\ (a - b)$, सर्व समिकाआें तथा उनके अनुप्रयोग का पिछली कक्षाआें में अध्ययन कर लिया है। इस अध्याय में हम कुछ द्विपदीय व त्रिघातीय और त्रिपदीय व द्विघातीय सर्वसमिकाआें तथा इनके अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे।

4.2 सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ का बोध

हम जानते हैं कि

$(a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2$

$= (a + b)\ (a^2 + 2ab + b^2)$

$= a\ (a^2 + 2\ ab + b^2) + b\ (a^2 + 2\ ab + b^2)$

$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3$

$= a^3 + (2a^2b + a^2b) + (ab^2 + 2ab^2) + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$

अत: $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$

आंकिक सत्यापन : माना $a = 2, b = 3$, तो

बायाँ पक्ष : $(a+b)^3 = (2+3)^3 = 125$

दायाँ पक्ष : $a^3 + b^3 + 3ab\ (a+b) = 2^3 + 3^3 + 3 \times 2 \times 3\ (2+3)$

$= 8 + 27 + 3 \times 2 \times 3\ (2+3)$

$= 8 + 27 + 90$

$= 125$

बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

ग्‌eह्‌eeme keेerefpeS :

इसी प्रकार, a = 1, b = 2 के लिए संबंध $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ का सत्यापन कीजिए।

हम देखते हैं कि उपरो‡‹त बीजीय संबंध a तथा b के प्रत्येक मान के लिए सत्य है। अत: यह एक सर्वसमिका है।

उदाहरण 1 : सर्वसमिका $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ का प्रयोग करके $(y + 4)^3$ का विस्तार कीजिए।

हल : $(y + 4)^3$ की $(a + b)^3$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$a = y$ तथा $b = 4$

सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ में a तथा b के मान प्रतिस्थपित करने पर,

$(y + 4)^3 = y^3 + 4^3 + 3\ \ y\ \ 4\ (y + 4)$

$= y^3 + 64 + 12\ y\ (y + 4)$

$= y^3 + 64 + 12y^2 + 48\ y = y^3 + 12y^2 + 48\ y + 64$

उदाहरण 2 : $(x + 5y)^3$ का प्रसार कीजिए।

हल : $(x + 5y)^3$ की $(a + b)^3$ से तुलना करने पर हम पाते हैं कि $a = x$ तथा $b = 5y$

अत: सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a + b)$ के प्रयोग से,

$(x + 5y)^3 = x^3 + (5y)^3 + 3x\ (5y)\ (x + 5y)$

$= x^3 + 125y^3 + 15xy\ (x + 5y)$

$= x^3 + 125y^3 + 15x^2y + 75xy^2$

$= x^3 + 15x^2y + 75xy^2 + 125\ y^3$

उदाहरण 3 : यदि $x + \quad = \frac{5}{2}$, तो 853.png का मान ज्ञात कीजिए

हल : $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\ (a+b)$

$\therefore$ =

=

$x +$ = $\frac{5}{2}$ प्रतिस्थपित करने पर,

=

या, $\frac{125}{8} = x^3 + \frac{1}{x^3} + \frac{15}{2}$

या, $\frac{125}{8} - \frac{15}{2} =$

अर्थातá $= \frac{6}{8}$

उदाहरण 4 : $a + b = 5$ और ab = 6, तो $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात कीजिए

हल : सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$ में,

a + b = 5, ab = 6 प्रतिस्थपित करने पर,

$5^3 = a^3 + b^3 + 3 \text{ x } 6 \text{ x } 5$

$125 = a^3 + b^3 + 90$

या, $125 - 90 = a^3 + b^3$ [90 का पक्षान्तर करने पर]

अत:$a^3 + b^3 = 35$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित का विस्तार कीजिए :

(i) $(1 + x)^3$ (ii) $(y + 2)^3$

(iii) यदि $x + \frac{1}{x} = 2$ तो $x^3 + \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4.2.1 सर्वसमिका (a + b)^3 = a3 + b^3 + 3ab (a + b) का अनुप्रयोग

उदाहरण 5 : (401)^3 का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $400 + 1 = 401$

$(401)^3 = (400 + 1)^3$

$= \{(4 \quad 10^2) + 1\}^3$

$= (4 \quad 10^2)^3 + (1)^3 + 3 \quad (4 \quad 10^2) \quad 1 \; \{(4 \quad 10^2) + 1\}$

$= 64 \quad 10^6 + 1 + 1200\,(400 + 1)$

$= 64 \quad 10^6 + 1 + 480000 + 1200$

$= 64000000 + 1 + 480000 + 1200$

$= 64481201$

प्रयास कीजिए :

उपर्यु‡‹त की भाúति निम्नांकित का मान सर्वसमिका की सहायता से ज्ञात कीजिए -

(i) $(101)^3$ (ii) $(201)^3$ (iii) $(302)^3$

4.2.2 सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$ से व्युत्पन्न अन्य रूप

$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$ से

दोनों पक्षों से $3\,ab\,(a + b)$ को घटाने पर,

$(a + b)^3 - 3\,ab\,(a + b) = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b) - 3ab\,(a + b)$

अथवा, $(a + b)^3 - 3ab(a + b) = a^3 + b^3$

या, $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$

$= (a + b)\{(a + b)^2 - 3ab\}$ (सर्वनिष्ठ लेने पर)

$= (a + b)\{(a^2 + b^2 + 2ab - 3ab\}$

$= (a + b)(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

इस प्रकार

$\mathbf{a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)}$

$\mathbf{= (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$

उदाहरण 6 : सिद्ध कीजिए कि $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

हल : **सर्वसमिका** $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ की सहायता से

$(x + 2)^3 = x^3 + 2^3 + 3 \quad x \quad 2(x + 2)$

या, $(x + 2)^3 = x^3 + 8 + 6x(x + 2)$

या, $(x + 2)^3 - 6x(x + 2) = x^3 + 8$

या, $x^3 + 8 = (x + 2)^3 - 6x(x + 2)$

$= (x + 2)\{(x + 2)^2 - 6x\}$

$= (x + 2)(x^2 + 4x + 4 - 6x)$

$= (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

प्रयास कीजिए

निम्नांकित को सिद्ध कीजिए :

(क) $\mathbf{27 + y^3 = (3 + y)(9 - 3y + y^2)}$

(ख) $\mathbf{x^3 + 64 = (x + 4)(x^2 - 4x + 16)}$

अभ्यास 4 (a)

1. निम्नांकित के विस्तार कीजिए :

(क) $(b + 1)^3$ **(ख)** $(c + 3)^3$ **(ग)** $(2x + 3)^3$

(घ) $(x^2 + y)^3$ **(ङ)** $(5 + 3y)^3$ **(च)** $(xy + 2a)^3$

2. निम्नांकित के प्रसार कीजिए :

(क) $\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{5}\right)^3$ **(ख)** $\left(3y + \frac{1}{4y}\right)^3$

3. निम्नांकित के मान सर्वसमिका $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3\ ab\ (a + b)$ की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(क) $(31)^3$ **(ख)** $(102)^3$ **(ग)** $(201)^3$

4. का मान ज्ञात कीजिए, यदि 1015.pngका मान $\frac{0}{3}$ Öõ -

5. यदि $2x + \frac{1}{2x} = \frac{5}{2}$ तो का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि $a + b = 3$तथा $ab = 2$, तो $a^3 + b^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $3x + 2y = 20$तथा $xy = \frac{\#}{9}$ तो $27x^3 + 8y^3$का मान ज्ञात कीजिए।

8. दर्शाइए कि

(i) $125 + x^3 = (5 + x)^3 - 15x\ (5 + x)$

(ii) $8a^3 + 27\ b^3 = (2a + 3b)^3 - 18ab\ (2a + 3b)$

4.3सर्वसमिका $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3\ ab\ (a - b)$ का बोध

देखिए,

$(a - b)^3 = (a - b)\ (a - b)^2$

$= (a - b)(a^2 + b^2 - 2ab)$

$= a\ (a^2 + b^2 - 2ab) - b\ (a^2 + b^2 - 2ab)$

$= a^3 + ab^2 - 2a^2b - ba^2 - b^3 + 2ab^2$

$= a^3 - b^3 + (ab^2 + 2ab^2) - (2a^2b + a^2b)$

$= a^3 - b^3 + 3ab^2 - 3a^2b$

$= a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

हम इस सर्वसमिका को निम्नांकित विधि से भी प्राप्त कर सकते हैं -

$a - b = a + (-b)$

$(a - b)^3 = \{a + (-b)\}^3$

अब $(a + b)^3$ और $\{a + (-b)\}^3$ की तुलना कीजिए।

यहांú $(a + (-b)\}^3$ में b के स्थान पर ज्र् b है।

$\{a + (-b)\}^3 = (a)^3 + (-b)^3 + 3a\ (-b)\ \{a + (-b)\}$

$= a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$

इस प्रकार $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$

आंकिक सत्यापन

माना $a = 5\ b = 3$, तो

बायाँ पक्ष : $(a - b)^3 = (5 - 3)^3 = (2)^3 = 8$

दायाँ पक्ष : $a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$

$= 125 - 27 - 3 \times 5 \times 3\ (5 - 3)$

$= 98 - 90$

$= 8$

$\because$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

प्रयास कीजिए :

$a = 4, b = 1$ के लिए संबंध $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$ का सत्यापन कीजिए

हम देखते हैं कि a तथा b के प्रत्येक मान के लिए बीजीय संबंध $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$ सत्य है।

अत: यह एक सर्वसमिका है।

उपर्यु‡‹त से अवलोकित होता है :

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$

अर्थातá दो पदों के अन्तर का घन = (प्रथम पद)^3 - (द्वितीय पद)^3- 3 प्रथम पद× द्वितीय पद (पहला पद -द्वितीय पद)

उदाहरण 7 : (a -1)3 का प्रसार कीजिए।

हल : (a - 1) की (a - b) से तुलना करने पर,

$a = a$ और $b = 1$

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$

$(a - 1)^3 = a^3 - 1^3 - 3a.1\ (a - 1)$

$= a^3 - 1 - 3a\ (a - 1)$

$= a^3 - 1 - 3a^2 + 3a$

$= a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

उदाहरण 8 : $(5x - 3y)^3$ का प्रसार कीजिए।

हल : $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\ (a - b)$ ½ãò $a = 5x$, $b = 3y$ प्रतिस्थपित करने पर,

$(5x - 3y)^3 = (5x)^3 - (3y)^3 - 3\ (5x) \times (3y)(5x - 3y)$

$= (5x)^3 - (3y)^3 - 45xy\ (5x - 3y)$

$= 125x^3 - 27y^3 - 225x^2y + 135\ xy^2$

$= 125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$

उदाहरण 9 : यदि $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$, तो का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

$\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 = x^3 - \left(\frac{1}{x}\right)^3 - 3\,x \times \left(x - \frac{1}{x}\right)$

$\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{3}{2}$ ा्रतिस्थपित करने पर,

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times \frac{3}{2}$

या, $\frac{27}{8} = x^3 - \frac{1}{x^3} - \frac{9}{2}$

या, $\frac{27}{8} + \frac{9}{2} =$

या, $= \frac{63}{8}$

उदाहरण 10 : यदि $a - b = 4$तथा $ab = 5$, तो $a^3 - b^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

इसमें $a - b = 4$तथा $ab = 5$ प्रतिस्थपित करने पर,

$(4)^3 = a^3 - b^3 - 3 \quad 5 \quad 4$

या, $64 = a^3 - b^3 - 60$

या, $a^3 - b^3 = 64 + 60 = 124$

प्रयास कीजिए :

निम्नांकित का विस्तार ज्ञात कीजिए :

(i) $(1 - x)^3$ (ii) $(y - 3)^3$

(iii) यदि $x - \frac{1}{x} = \frac{8}{3}$ हो तो $|x + y| = \left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ का मान ज्ञात कीजिए।

4.3.1 सर्वसमिका (a - b)3 = $a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$ से व्युत्पन्न अन्य रूप

$(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$

दोनों पक्षों में 3ab (a - b) जोüडने पर

$(a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b) + 3ab\,(a - b)$

$(a - b)^3 + 3ab\,(a - b) = a^3 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

Øeयाme keâerefpeS :

„¹ã¾ãìÃ‡ã‹¦ã कãè ¼ããúãä¦ã ããÔã® कãèãä•ã† ããक

(क) $1 - 8y^3 = (1 - 2y)^3 + 6y\,(1 - 2y)$

(ख) $27 - z^3 = (3 - z)^3 + 9z\,(3 - z)$

¹ãì¶ã: $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)$

$= (a - b)\{(a - b)^2 + 3ab\}$

$= (a - b)(a^2 + b^2 - 2ab + 3ab)\ \}$

$= (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Øeयाme keâerefpeS : „¹ã¾ãìÃ‡ã‹¦ã कãè ¼ããúãä¦ã ããÔã® कãèãä•ã† ããक

(क) $64 - x^3 = (4 - x)\,(16 + 4x + x^2)$

(ख) $1 - 27y^3 = (1 - 3y)\,(1 + 3y + 9y^2)$

*f*Ôã ¹ãÆकãÀ

$\mathbf{a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab\,(a - b)}$

$\mathbf{= (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$

4.3.2 $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$ कã ,ã¶ãì¹ãÆयाñग

उदाहरण 11 : 99^3 कã ½ãã¶ã ÔãÌãÃÔããä½ãकã कãè ÔãÖã¾अतã Ôãñ —ãअत कãèãä•ã†।

हल : $99 = (100 - 1)$

$99^3 = (100 - 1)^3$

ÔãÌãÃÔããä½ãकã $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab\,(a - b)$ ½ãò $a = 100$, $b = 1$ ¹ãÆãä¦ãÔ©ãããä¹अत कÀ¶ãñ ¹ãÀ,

$(100 - 1)^3 = (100)^3 - 1^3 - 3 \times 100 \times 1 \times (100 - 1)$

$= 1000000 - 1 - 300 \times 99$

$= 999999 - 29700$

$99^3 = 970299$

✍ Øeयाme keâerefpeS :

„¹ã¾ãìÃ ‡ ã‹¦ã कãè ¼ããúãä¦ã ãä¶ã½¶ãããÊããäख¦ã ‡ ãñŠ ½ãã¶ã —ãअत कãèãä•ã† :

(i) $(999)^3$ (ii) $(.98)^3$ (iii) $(499)^3$

उदाहरण 12 : $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)^3 - \left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)^3$ कãñ ÔãÀÊã कãèãä•ã†।

हल : $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$ (1)

तथा$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$ (2)

meceerkeâjCe (1) ½ãò Ôãñ meceerkeâjCe (2) keâes घ›ã¶ãñ ¹ãÀ,

$(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b^3 + 6a^2b$

¾ãÖãú $a = \frac{x}{3},\ b = \frac{y}{5}$

,अत: $\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{5}\right)^3 - \left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)^3 = 2\left(\frac{y}{5}\right)^3 + 6\left(\frac{x}{3}\right)^2 \cdot \frac{y}{5}$

$= \frac{2y^3}{125} + \frac{2x^2y}{5}$

अभ्यास 4 (*b*)

1. निम्नांकित के प्रसार कीजिए :

(क) $(x-7)^3$ **(ख)** $(2-y)^3$ **(ग)** $\left(3p-\frac{1}{4q}\right)^3$ **(घ)** $\left(4-\frac{1}{3y}\right)^3$ **(ङ)** $(7x-3y)^3$ **(च)** $(8-2a)^3$

2. $x^3 - \frac{1}{x^3}$ का मान ज्ञात कीजिए, यदि 1260 lpng के मान $\frac{4}{5}$ Öö ।

3. यदि = $\frac{8}{9}$, तो का मान ज्ञात कीजिए।

4. निम्नांकित के मान सर्वसमिका की सहायता से ज्ञात कीजिए।

(i) 98^3 **(ii)** $(9.9)^3$ **(iii)** $(598)^3$

5सरल कीजिए

(i) $(x+7)^3 - (x-7)^3$ **(ii)** $(3x+8y)^3 - (3x-8y)^3$

(iii) **(iv)** $(7k-5l)^3 - (7k+5l)^3$

6. यदि $x - y = 4$तथा $xy = 21$, तो $x^3 - y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

7. यदि $7x - 5y = 6$,ãäõÀ $xy = 9$, तो $343x^3 - 125y^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

4.4 सर्वसमिका (a + b + c)2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca का बोध

$a + b + c = (a+b) + c$

*f*Ôã ¹ãÆकãÀ $(a+b+c)^2 = \{(a+b)+c\}^2$

$= (a+b)^2 + 2(a+b).c + c^2$

$= a^2 + b^2 + 2ab + 2ac + 2bc + c^2$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

,ããâãäकक Ôã¦या¹ã¶ã : ½ãã¶ãã, $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

ºããयाँ ¹ãàã $= (a + b + c)^2 = (1 + 2 + 1)^2 = 4^2$

$= 16$

दायाँ पक्ष $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

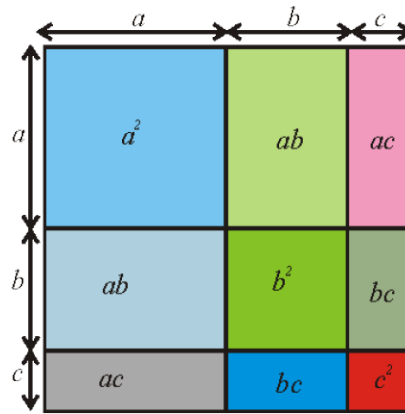
$= 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2 \times 1 \times 2 + 2 \times 2 \times 1 + 2 \times 1 \times 1$

$= 1 + 4 + 1 + 4 + 4 + 2$

$= 16$

∴ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

ज्यामितीय निरुपण एवं सत्यापन

निम्नंकित चित्र में (a + b + c) भुजा का एक वर्ग है।

अत: यह स्पष्ट अवलोकित है कि

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

तीन पदों के योगपŠल का वर्ग = (प्रथम पद)2 + (द्वितीय पद)^2 + (तðतीय पद)^2 + 2 (प्रथम पद ह= द्वितीय पद) + 2 (द्वितीय पद ह= तðतीय पद) + 2 (तðतीय पद ह= प्रथम पद)

4.4.1 सर्वसमिवां $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$ वां अनुगहोग

(i) $(a + b - c)^2 = [a + b + (-c)]^2$

$= a^2 + b^2 + (-c)^2 + 2ab + 2b(-c) + 2(-c)a$

$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ca$

(ii) $(a - b + c)^2 = [a + (-b) + c]^2$

$= a^2 + (-b)^2 + c^2 + 2a(-b) + 2(-b)c + 2ca$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc + 2ca$

(iii) $(-a + b + c)^2 = [(-a) + b + c]^2$

$= (-a)^2 + b^2 + c^2 + 2(-a)b + 2bc + 2c(-a)$

$= a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2bc - 2ca$

उदाहरण 13 : निम्नांकित के प्रसार कीजिए :

(i) $(2x + 3y + 4z)^2$ (ii) $(x - 2y + 3z)^2$

हल : (i) $(2x + 3y + 4z)^2$

$= (2x)^2 + (3y)^2 + (4z)^2 + 2\,(2x)\,(3y) + 2\,(3y)\,(4z) + 2\,(2x)(4z)$

$= 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16\,zx$

(ii) $(x - 2y + 3z)^2 = \{x + (-2y) + 3z\}^2$

$= x^2 + (-2y)^2 + (3z)^2 + 2x\,(-2y) + 2\,(-2y)\,(3z) + 2\,(3z)x$

$= x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 12\,yz + 6\,zx$

उदाहरण 14 : यदि $x + y + z = 12$ और $x^2 + y^2 + z^2 = 64$, तो $xy + yz + zx$ का मान ज्ञात कीजिए:

हल : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

$(12)^2 = 64 + 2\,(xy + yz + zx)$

या, $144 = 64 + 2\,(xy + yz + zx)$

या, $144 - 64 = 2\,(xy + yz + zx)$

या, $80 = 2\,(xy + yz + zx)$

या, $40 = xy + yz + zx$

या, $xy + yz + zx = 40$

प्रयास कीजिए :

(i) यदि $a + b + c = 9$ और $ab + bc + ca = 23$, तो $a^2 + b^2 + c^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ii) यदि $a^2 + b^2 + c^2 = 70$ और $ab + bc + ca = 37$,तो $a + b + c$ का मान ज्ञात कीजिए।

अभ्यास 4 (c)

1. प्रसार कीजिए :

(i) $(a + 2b + 3c)^2$ (ii) $(2p - q - 3r)^2$

(iii) $(-3x + 2y + z)^2$ (iv) $(2x - 3y + 4)^2$

(v) $(m + 3n - 4p)^2$ (vi) $(7 + 4a - 3b)^2$

(vii) $(2x - 9 + 5y)^2$ (viii) $(xy + yz + zx)^2$

2. सरल कीजिए :

(i) $(x + y + z)^2 + (x - y + z)^2 + (x + y - z)^2$

(ii) $(3x - 2y + z)^2 - (3x + 2y - z)^2$

(iii) $(x^2 + y^2 - z^2)^2 - (x^2 - y^2 + z^2)^2$

सामूहिक चर्चा

1.प्रसार कीजिए :

(i) $(x + 2y + 3z)^2$ (ii) $(x - 2y + z)^2$

(iii) $(a + 2b)^3$ (iv) $(2 - 3p)^3$

दक्षता अभ्यास - 4

1.निम्नांकित के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 997^3 (ii) $(10.5)^3$

(iii) 501^3 (iv) $(9.5)^3$

2. मान ज्ञात कीजिए

(i) $x^3 - y^3$ यदि $x - y = 4$ और $xy = 21$

(ii) $p^3 + q^3$, यदि $p + q = 5$ और $pq = 6$

(iii) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$, यदि $x = 3$

(iv) $64x^3 - 125z^3$ यदि $4x - 5z = 16$ और $xz = 12$

प्रश्न 3 से 9 तक में उत्तर के दिये गये विकल्पों में से सही विकल्प छाúटिए :

3. $(1 - y)^3$ का मान है :

(i) $(1 - y)(1 + y)^2$ (ii) $(1 - y)(1 + y^2 - y)$

(iii) $1 - y^3 - 3y(1 - y)$ (iv) $1 + y^3 + 3y(1 + y)$

4. $8 + x^3$ का मान है :

(i) $(2 + x)(4 + x^2 + 2x)$ (ii) $(2 + x)(4 + x^2 - 2x)$

(iii) $(2 + x)(4 + x^2)$ (iv) $(2 - x)(4 + x^2 + 2x)$

5. $(1 - 27p^3)$ का मान है :

(i) $(1-3p)(1+9p^2+3p)$ (ii) $(1+3p)(1+9p^2+3p)$

(iii) $(1-3p)(1+9p^2-3p)$ (iv) $(1+3p)(1-9p^2)$

6. $(2+x)^3$ का मान है :

(i) $8+x^3+2x(2+x)$ (ii) $8+x^3+6x(2-x)$

(iii) $8+x^3+6x(2+x)$ (iv) $(8+x^3+6x)$

7. $(1+2x+y)^2$ का मान है :

(i) $1+4x^2+y^2+4x+4xy+2y$

(ii) $1+4x^2-y^2+4x+4xy+2y$

(iii) $1-4x^2+y^2+4x+4xy+2y$

(iv) $1+4x^2+y^2+4x+4xy-2y$

8. सर्वसमिका $(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$ का ही रूप है :

(i) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$

(ii) $(a+b)^3=a^3-b^3+3ab(a+b)$

(iii) $(a+b)^3=a^3+b^3-3ab(a+b)$

(iv) $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a-b)$

9. $(a-b)^3$ का मान है

(i) $a^3+b^3-3ab(a-b)$ (ii) $a^3-b^3-3ab(a-b)$

(iii) $a^3-b^3+3ab(a-b)$ (iv) $a^3-b^3-3ab(b-a)$

हमने ‡‹या चर्चा की : -

सर्वसमिका $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ का सत्यापन

सर्वसमिका $(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$ का सत्यापन

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$ का सत्यापन एवं ज्यामितीय निरूपण

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ का सत्यापन

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ का सत्यापन

उ‡‹त सभी सर्वसमिकाआें के अनुप्रयोग

$2x+\frac{1}{2x}=\frac{5}{2}$

उत्तर माला

अभ्यास 4(a)

1. (क) $b^3 + 3b^2 + 3b + 1$ **(ख)** $c^3 + 9c^2 + 27c + 27$ **(ग)** $8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$

(घ) $x^6 + 3x^4y + 3x^2y^2 + y^3$ **(ङ)** $125 + 225y + 135y^2 + 27y^3$ **(च)** $x^3y^3 + 6ax^2y^2 + 12a^2xy + 8a^3$ **2. (क)** $+ \left(\frac{a}{2}+\frac{b}{5}\right) + \; =$

$+ \quad + \quad +$ **(ख)** $27y^3 + \frac{9}{4}\left(3y+\frac{1}{4y}\right) + \; = 27y^3 + \quad + \quad +$

3. (क) 29791 (ख) 1061208 (ग)8120601 4. $\frac{730}{2}$ **5.** $\frac{6}{8}$
6. 9 7. 7440

अभ्यास 4(*b*)

1. (क) $x^3 - 21x(x - 7) - 343 = x^3 - 21x^2 + 147x - 343$ **(ख)** $8 - 6y(2 - y) - y^3 = 8 - 12y + 6y^2 - y^3$ **(ग)** $27p^3 - \frac{9p}{4q}\left(3p - \frac{1}{4q}\right) - \frac{1}{6q^3} = 27p^3 - \frac{2p^2}{4q} + \frac{9p}{6q^2} - \frac{1}{6q^3}$ **(घ)** $64 - \left(4 - \frac{1}{3y}\right) - \; = 64 -$ **(ङ)** $343x^3 - 63xy(7x - 3y) - 27y^3 = 343x^3 - 441x^2y + 189xy^2 - 27y^3$ **(च)** $512 - 48a(8 - 2a) - 8a^3 = 512 - 384a + 96a^2 - 8a^3$ **2.** $\frac{15624}{125}$ **3.** $\frac{728}{2}$
4. (i) 941192 **(ii)** 970.299**(iii)** 19847192 **5. (i)** $42x^2 + 686$ **(ii)** $432x^2y + 1024y^3$ **(iii)** **(iv)** $-1470k^2l - 250l^3$ **6.** 316 **7.** 5886

अभ्यास 4(*c*)

1. (i) $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + 4ab + 12bc + 6ca$ **(ii)** $4p^2 + q^2 + 9r^2 - 4pq + 6qr - 12pr$
(iii) $9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12xy + 4yz - 6xz$ **(iv)** $4x^2 + 9y^2 + 16 - 12xy - 24y + 16x$
(v) $m^2 + 9n^2 + 16p^2 + 6mn - 24np - 8pm$ **(vi)** $49 + 16a^2 + 9b^2 + 56a - 24ab - 42b$
(vii) $4x^2 + 81 + 25y^2 - 36x - 90y + 20xy$
(viii) $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + 2xy^2z + 2xyz^2 + 2x^2yz$
2. (i) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2xy - 2yz + 2zx$ **(ii)** $-24xy + 12xz = 6x(2z - 4y) = 12x(z - 2y)$
(iii) $2x^2(2y^2 - 2z^2) = 4x^2(y^2 - z^2) = 4x^2(y + z)(y - z)$

सामtहिक चर्चा

1. (i) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4xy + 12yz + 6xz$ (ii) $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4xy - 4yz + 2xz$
(iii) $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$ **(iv)** $8 - 18p(2 - 3p) - 27p^3 = 8 - 36p + 54p^2 - 27p^3$

दक्षता अभ्यास 4

1. (i) 991026973
(ii) 1157.625 (iii) 125751501 (iv) 857.375 **2.** (i) 316 (ii)35
(iii) 216 (iv) 15616 3. (iii) $1 - y^3 - 3y(1 - y)$ **4. (ii)** $(2 + x)(4 + x^2 - 2x)$
5. (i) $(1 - 3p)(1 + 9p^2 + 3p)$ **6. (iii)** $8 + x^3 + 6x(2 + x)$ **7. (i)** $1 + 4x^2 + y^2 + 4x + 4xy + 2y$ **8. (i)** $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ **9. (ii)** $a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

इकाई 5 बीजीय व्यंजकों का भाग एवं गुणनखंड

- बीजगणितीय व्यंजकों में एक पदीय तथा द्विपदीय व्यंजकों से भाग (बीजीय पद 5 घातांकों तक सीमित हों)
- भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल, का सत्यापन
- बहुपदीय व्यंजकों के गुणनखण्ड की संकल्पना (तीन पद से अधिक नहीं) $[a^2 + 2ab + b^2, a^2 - 2ab + b^2, a^2 - b^2]$
- $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखण्ड

5.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में हम बीजीय व्यंजकों और सर्वसमिकाओं के बारे में पढ़ चुके हैं तथा बीजीय व्यंजकों का गुणन करना भी सीख चुके हैं। इस अध्याय में हम एक चर के बहुपदीय व्यंजकों के बारे में पढ़ेंगे और हम सीखेंगे कि एक बहुपद में एकपदीय या द्विपदीय बीजीय व्यंजकों से कैसे भाग दिया जाता है और अध्याय के अन्त में हम बहुपदों का गुणनखंड ज्ञात करना सीखेंगे।

5.2 एक चर में बहुपद

हम जानते हैं कि $12x^3y^2$ और $4xy^3$ दो चरों x तथा y में पद हैं। व्यंजक $y^2 + 5y + 6$ केवल एक चर y में बहुपदीय बीजीय व्यंजक है। इसी प्रकार, व्यंजक $a^2 + ab + b^2$ दो चर a तथा b में बहुपदीय बीजीय व्यंजक है।

ध्यान दें, बीजीय व्यंजक $2x^4 - 4x^2 + 12$ एक चर x में बहुपद है तथा इसके विभिन्न पदों में पद $2x^4$ की अधिकतम घातांक 4 है, पद $-4x^2$ की घात 2 और 12 में x की घात शून्य है (चूँकि $12 = 12x^0$)।

इसी प्रकार $(y^2 + 8y + 15)$ में चर y में दो घात का बहुपद है। बहुपद $5z^5 - 2z^3 + 7z^2 + 8$ में चर z की अधिकतम घात 5, $7y - 9 + y^3$ में चर y की अधिकतम घात 3 और $x^7 - x^5 + x^3 - \sqrt{3}x^2$ में चर x की अधिकतम घात 7 है।

टिप्पणी (i) बहुपद $3x^4 - 4x^3y^2 + 5x^2y^2 + y^3$ में चर x और y हैं। इसके विभिन्न पदों में x और y के घातांकों का योगफल निम्नांकित है –

$3x^4$ में x तथा y के घातांकों का योगफल $= 4 + 0 = 4$

$-4x^3y^2$ में x तथा y के घातांकों का योगफल $= 3 + 2 = 5$

$5x^2y^2$ में x तथा y के घातांकों का योगफल $= 2 + 2 = 4$

तथा y^3 में x तथा y के घातांकों का योगफल $= 0 + 3 = 3$

इस प्रकार दो चरों x तथा y में बहुपद $3x^4 - 4x^3y^2 + 5x^2y^2 + y^3$ के विभिन्न पदों में x तथा y के घातांकों के योगफल का अधिकतम मान 5 है, अतः इस बहुपद का घात 5 है।

(ii) चूँकि $x^0 = 1$ इसलिए $11x^0 = 11$, अतः पद 11 में चर की घात शून्य है।

5.3.1 एक पदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजक से भाग

अब हम एक पदीय व्यंजक $12x^3y^2$ में एक पदीय व्यंजक $-4xy$ से भाग देने की क्रिया पर विचार करते हैं।

प्रथम विधि

$$12x^3y^2 = (-4xy) \times (-x^2y) \quad \text{(गुणनखण्ड में लिखने पर)}$$

अतः $$12x^3y^2 \div (-4xy) = \frac{(-4xy)\times(-3x^2y)}{(-4xy)}$$

अर्थात् $$\frac{12x^3y^2}{-4xy} = -3x^2y$$

द्वितीय विधि

चर को चर से भाग तथा अचर को अचर से भाग देने पर

ध्यान दें $12x^3y^2$ में 12 अचर तथा x^3y^2 चर है।

इसी प्रकार $-4xy$ में -4 अचर तथा xy चर।

अतः $\frac{12}{-4} = -3$ और $\frac{x^3y^2}{xy} = x^2y$ (घातांक नियम से $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$)

दोनों को सम्मिलित करके लिखने पर,

$$\frac{12x^3y^2}{-4xy} = -3x^2y$$

टिप्पणी : भाजक के एकपदीय होने की दशा में भाज्य को अवरोही क्रम में रखे बिना भी प्रश्न 2 के अनुसार भागफल प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 1 : भागफल ज्ञात कीजिए :

$$(18x + 12x^3 - 6x^2) \div (-3x)$$

हल : भाज्य $= 18x + 12x^3 - 6x^2$, भाजक $= -3x$

$$= 12x^3 - 6x^2 + 18x$$

$$\therefore (12x^3 - 6x^2 + 18x) \div (-3x)$$

$$= (12x^3 - 6x^2 + 18x) \div (-3x)$$

$$= \frac{12x^3}{(-3x)} - \frac{6x^2}{(-3x)} + \frac{18x}{(-3x)}$$

$$= -4x^2 + 2x - 6$$

अभ्यास 5 (*a*)

1. भाग दीजिए :
   (क) $8x^3yz$ में $2xy$ से,
   (ख) $15x^2y^3$ में $3x^2y^2$ से,
   (ग) $a^2 - b^2$ में $(a + b)$ से,
2. सरल कीजिए :
   (क) $\frac{32m^3y^2}{4m^2y}$
   (ख) $\frac{x^3+4x^2+4x}{x}$
   (ग) $\frac{16x^2-8x^3}{4x}$
   (घ) $\frac{9a^2-24a+18a^3}{3a}$

5.3.3 एक बहुपद में द्विपद से भाग

प्रथम स्थिति - शून्य शेषफल

चूँकि $(x + 5)(x + 2) = x^2 + 7x + 10$,
अतः संख्याओं के भाग के नियमानुसार, हम कहते हैं कि

$$\frac{x^2+7x+10}{x+5} = x+2$$

या

$$\frac{x^2+7x+10}{x+2} = x+5$$

उपर्युक्त में $x^2 + 7x + 10$ भाज्य, $(x + 5)$ भाजक और $(x + 2)$ भागफल है।
अथवा $x^2 + 7x + 10$ भाज्य, $(x + 2)$ भाजक और $(x + 5)$ भागफल है।
ठीक इसी प्रकार,

$$\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x+a} = x + b$$

[चूँकि $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$]

अतः ऐसे बीजीय व्यंजक, जिनके अंश तथा हर के रूप में प्रयुक्त चरों के घात धनात्मक पूर्णांक हैं, परिमेय व्यंजक कहलाते हैं।

उदाहरणार्थ,

$\frac{x^2+(a+b)x+ab}{x+a}$, $\frac{x^2+7x+10}{x+5}$ परिमेय व्यंजक हैं।

उदाहरणार्थ, अब हम बहुपद $(-12 - 6x^2 + 17x)$ में द्विपद $(2x - 3)$ से भाग करने पर विचार करेंगे।

(i) भाज्य तथा भाजक के पदों को अवरोही घात के क्रम में लिखते हैं। अतः भाज्य $(-12 - 6x^2 + 17x)$ को $(-6x^2 + 17x - 12)$ तथा भाजक $(2x - 3)$ को यथावत लिखेंगे। अर्थात्

$$2x - 3 \overline{)\, -6x^2 + 17x - 12}$$

(ii) भाजक $(2x - 3)$ के प्रथम पद $2x$ से भाज्य $-6x^2 + 17x - 12$ के प्रथम पद $-6x^2$ में भाग देते हैं। इस प्रकार $-6x^2 \div 2x = -3x$ भागफल का प्रथम पद है।

$$\begin{array}{r} -3x \\ 2x - 3 \overline{)\, -6x^2 + 17x - 12} \end{array}$$

(iii) अब भाजक $(2x - 3)$ में भागफल के प्रथम पद $-3x$ से गुणा करके गुणनफल $(2x - 3) \times (-3x) = -6x^2 + 9x$ को भाज्य में से घटाते हैं। इस प्रकार

$$(-6x^2 + 17x - 12) - (-6x^2 + 9x) = -6x^2 + 17x - 12 + 6x^2 - 9x$$
$$= 8x - 12$$

अर्थात्

$$\begin{array}{r} -3x \\ 2x-3\,\overline{)\,-6x^2+17x-12} \\ \mp 6x^2 \pm 9x \\ \hline 8x-12 \end{array}$$

(iv) शेष $(8x-12)$ को नवीन भाज्य के रूप में लेकर भाजक $(2x-3)$ से भाग करते हैं। नवीन भाज्य का प्रथम पद $8x$, भाजक $(2x-3)$ के प्रथम पद $2x$ का 4 गुना है। इस प्रकार +4 भागफल का द्वितीय पद है।

$$\begin{array}{r} +4 \\ 2x-3\,\overline{)\,8x-12} \end{array}$$

(v) भाजक $(2x-3)$ को भागफल के द्वितीय पद +4 से गुणा करके गुणनफल $(2x-3)\times 4 = (8x-12)$ को नवीन भाज्य $(8x-12)$ से घटाते हैं, तो शेषफल शून्य प्राप्त हो जाता है। अर्थात्

$$\begin{array}{r} +4 \\ 2x-3\,\overline{)\,8x-12} \\ \underset{-}{}8x \underset{+}{-} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

उपर्युक्त क्रियापदों को समग्र रूप से निम्नांकित ढंग से प्रदर्शित करते हैं।

$$\begin{array}{r} -3x+4 \\ 2x-3\,\overline{)\,-6x^2+17x-12} \\ \mp 6x^2 \pm 9x \\ \hline 8x-12 \\ \underset{-}{}8x \underset{+}{-} 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

नोट

जब एक बीजीय व्यंजक को दूसरे बीजीय व्यंजक से घटाते हैं, तो दूसरे बीजीय व्यंजक के चिह्न (+ को – तथा – को +) बदल कर ही घटाने की क्रिया करते हैं।

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त भाग के प्रश्न में शेषफल शून्य है। अतः

$(-12-6x^2+17x)$ का $(2x-3)$ एक गुणनखंड है तथा प्राप्त भागफल $(-3x+4)$ भी $(-12-6x^2+17x)$ का एक गुणनखण्ड होगा।

भागफल

यदि एक बहुपद (भाज्य) में दूसरे बहुपद (भाजक) से भाग करने पर शेषफल शून्य प्राप्त हो, तो इस प्रकार भाजक तथा प्राप्त भागफल, भाज्य के गुणनखंड होते हैं।

अर्थात् भाज्य = भाजक × भागफल

ध्यान दें, भाज्य, भाजक तथा भागफल एक समान चर x में बहुपदीय, द्विपदीय या एक पदीय बीजीय व्यंजक हैं।

उदाहरण 2 $(2y^4+7y^2+8y^3+4y+3)$ में $(3+y)$ से भाग दीजिए। बताइए कि क्या $(3+y)$, $(2y^4+7y^2+8y^3+4y+3)$ का एक गुणनखंड है ?

हल घातों को अवरोही क्रम में रखने पर भाज्य $= (2y^4+8y^3+7y^2+4y+3)$ तथा भाजक $= (y+3)$

$$\begin{array}{r} 2y^3+2y^2+y+1 \\ y+3\,\overline{)\,2y^4+8y^3+7y^2+4y+3} \\ \underset{-}{}2y^4 \underset{-}{+} 6y^3 \\ \hline 2y^3+7y^2+4y+3 \\ \underset{-}{}2y^3 \underset{-}{+} 6y^2 \\ \hline y^2+4y+3 \\ \underset{-}{}y^2 \underset{-}{+} 3y \\ \hline y+3 \\ \underset{-}{}y \underset{-}{+} 3 \\ \hline 0 \end{array}$$

शेषफल = 0

अतः भाजक $(y+3)$, भाज्य $(2y^4+8y^3+7y^2+4y+3)$ का एक गुणनखंड है।

तथा भागफल $(2y^3+2y^2+y+1)$ भाज्य $(2y^4+8y^3+7y^2+4y+3)$ का दूसरा गुणनखंड

अतः $(2y^4+8y^3+7y^2+4y+3) = (y+3)(2y^3+2y^2+y+1)$

स्पष्टीकरण

भाजक × भागफल $= (y+3)(2y^3+2y^2+y+1)$

$= 2y^4+2y^3+y^2+y+6y^3+6y^2+3y+3)$

$= 2y^4+8y^3+7y^2+4y+3)$

= भाज्य

अर्थात्

भाजक × भागफल = भाज्य

5.4 द्वितीय स्थिति : शून्येतर शेषफल

उपर्युक्त उदाहरणों में भाग की सभी क्रियाओं में शेषफल शून्य प्राप्त होता है। ऐसी स्थितियों में हम कहते हैं कि भाज्य, भाजक से पूर्णतः विभाज्य है। अब हम ऐसी स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें शेषफल शून्य न हो।

ध्यान दीजिए, कि संख्याओं की इस प्रकार की स्थिति में भाग की क्रिया हम तब तक चालू रखते हैं जब तक हम भाजक से छोटा शेषफल नहीं पा जाते हैं। इसी प्रकार बहुपदों की स्थिति में भी भाग की क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक शेषफल, भाजक से कम घातांक का बहुपद नहीं हो जाता है।

उदाहरण 3 $15z^3 - 20z^2 + 13z - 12$ में $3z - 6$ से भाग दीजिए।

हल

$$5z^2 + \frac{10}{3}z + 11$$

$$3z - 6 \,)\, 15z^3 - 20z^2 + 13z - 12$$

$$\underline{15z^3 - 30z^2}$$

$$10z^2 + 13z - 12$$

$$\underline{10z^2 - 20z}$$

$$33z - 12$$

$$\underline{33z - 66}$$

$$54$$

भागफल $= 5z^2 + \frac{10}{3}z + 11$

शेषफल = 54

उदाहरण 4 $34x - 22x^3 - 12x^4 - 10x^2 - 75$ में $3x + 7$ से भाग दीजिए।

हल $34x - 22x^3 - 12x^4 - 10x^2 - 75$ को x के अवरोही घातांक के पदों में व्यवस्थित करने पर,

भाज्य $= -12x^4 - 22x^3 - 10x^2 + 34x - 75$

$$-4x^3 + 2x^2 - 8x + 30$$

$$3x + 7 \,)\, -12x^4 - 22x^3 - 10x^2 + 34x - 75$$

$$\underline{-12x^4 - 28x^3}$$

$$6x^3 - 10x^2 + 34x - 75$$

$$\underline{6x^3 + 14x^2}$$

$$-24x^2 + 34x - 75$$

$$\underline{-24x^2 - 56x}$$

$$90x - 75$$

$$\underline{90x + 210}$$

$$-285$$

नोट

भाग की क्रिया को सरलता से करने के लिए भाजक व भाज्य में आये बीजीय पदों को उनकी घातों के अवरोही क्रम में रखते हैं।

भागफल $= -4x^3 + 2x^2 - 8x + 30$

शेषफल $= -285$

5.4.1 (भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल) का सत्यापन

संख्याओं में भाग करना हम पिछली कक्षाओं में सीख चुके हैं। 35 ÷ 4 पर विचार कीजिए। स्पष्टतः 8 भागफल और 3 शेषफल है।

इसमें 35 भाज्य और 4 भाजक है।

$35 = (4 \times 8) + 3$

अर्थात्

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

अब हम देखेंगे कि क्या यह कथन बीजगणितीय व्यंजकों के भाग में भी सत्य है।

हो जायें।

5.5 बहुपदीय व्यंजकों के गुणनखंड की संकल्पना (तीन पद से अधिक नहीं)

पिछली कक्षाओं में हम निम्नांकित प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड करना सीख चुके हैं :

(i) $(ax + ay)$ (ii) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2$

अब हम कुछ त्रिपदीय व्यंजकों (सर्वसमिकाओं पर आधारित व्यंजक) का गुणनखंड करना सीखेंगे।

5.5.1 $a^2 + 2ab + b^2$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखंड

प्रथम विधि- सर्वसमिका का प्रयोग करके :

हम पढ़ चुके हैं कि $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

इस सर्वसमिका को हम निम्नांकित रूप में भी समझ सकते हैं।

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$
$$= (a + b)(a + b)$$

द्वितीय विधि- समूह बनाकर :

इसे हम निम्नांकित ढंग से भी प्राप्त कर सकते हैं।

$$a^2 + 2ab + b^2$$
$$= a^2 + ab + ab + b^2$$
$$= a(a + b) + b(a + b)$$
$$= (a + b)(a + b)$$
$$= (a + b)^2$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

अतः $a^2 + 2ab + b^2$ के गुणनखंड $(a + b)(a + b)$ हैं तथा बीजीय व्यंजक $a^2 + 2ab + b^2$ को गुणनखंडों के गुणन के रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं।

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

उदाहरण 6 : $x^2 + 8x + 16$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $x^2 + 8x + 16 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2$

$= (x + 4)^2$ ... ($a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ के अनुसार)

$= (x + 4)(x + 4)$

अतः $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखंड $(x + 4)$ तथा $(x + 4)$ हैं।

तथा $x^2 + 8x + 16$ को गुणनखंडों के गुणन के रूप में हम निम्न प्रकार से लिखते हैं।

$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

समूह बनाकर

$x^2 + 8x + 16 = x^2 + 4x + 4x + 16$

$= x(x + 4) + 4(x + 4)$

$= (x + 4)(x + 4) = (x + 4)^2$

अतः $x^2 + 8x + 16$ के गुणनखंड $(x + 4)$ तथा $(x + 4)$ हैं।

उदाहरण 7 : $36x^2 + 12x + 1$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $36x^2 + 12x + 1$

$= (6x)^2 + 2 \cdot 6x \cdot 1 + 1^2$

$= (6x + 1)^2$

अतः $36x^2 + 12x + 1$ के गुणनखंड $(6x + 1)$ तथा $(6x + 1)$ हैं

तथा $36x^2 + 12x + 1 = (6x + 1)^2$ (गुणनखंडों के गुणन के रूप में)।

समूह विधि द्वारा,

$36x^2 + 12x + 1$

$= 36x^2 + 6x + 6x + 1$

$= 6x(6x + 1) + 1(6x + 1)$

$= (6x + 1)(6x + 1)$

$= (6x + 1)^2$

उदाहरण 8 : $p^2 + 3p + \frac{9}{4}$ का गुणनखंड कीजिए

हल : $p^2 + 3p + \frac{9}{4}$

$= p^2 + 2p\left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2$

$= \left(p + \frac{3}{2}\right)^2$

समूह विधि द्वारा

$$p^2 + 3p + \frac{9}{4}$$

$$= p^2 + 2\left(\frac{3}{2}\right)p + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= p^2 + \frac{3}{2}p + \frac{3}{2}p + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= p\left(P+\frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(P+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(P+\frac{3}{2}\right)\left(P+\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left(P+\frac{3}{2}\right)^2$$

उपर्युक्त उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट है कि

$a^2 + 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड $(a + b)(a + b)$ तथा $(a + b)^2$ (गुणनखंड के गुणन के रूप में) है।

अभ्यास 5 (c)

1. निम्नांकित व्यंजकों में $(a^2 + 2ab + b^2)$ प्रकार के व्यंजकों को छाँटिए
   (i) $a^2 + 10a + 16$ (ii) $x^2 - 5x + 4$
   (iii) $x^2 + 10x + 25$ (iv) $49m^2 + 140\,mn + 100n^2$
2. निम्नांकित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए
   (i) $a^2 + 2a + 1$ (ii) $36 + 12x + x^2$
   (iii) $4c^2 + 4c + 1$ (iv) $36x^2 + 60x + 25$
   (v) $9x^2 + 6x + 1$
3. (i) $x^2 + x + \frac{1}{4}$ का गुणनखंड कीजिए।

   (ii) $p^2 + 5p + \frac{25}{4}$ का गुणनखंड कीजिए।

5.5.2 व्यंजक $(a^2 - 2ab + b^2)$ के रूप के व्यंजकों का गुणनखंड

प्रथम विधि- सर्वसमिका का प्रयोग करके :

हम जानते हैं कि

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

इस सर्वसमिका को हम निम्नांकित रूप में लिख सकते हैं :

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

द्वितीय विधि- समूह बनाकर :

इसे हम निम्नांकित ढंग से प्राप्त कर सकते हैं :

$a^2 - 2ab + b^2$

$$= a^2 - ab - ab + b^2$$

$$= a(a - b) - b(a - b)$$

$$= (a - b)(a - b)$$

$$= (a - b)^2$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

अत: $a^2 - 2ab + b^2$ के गुणनखंड $(a - b)$ तथा $(a - b)$ हैं, जिसे हम $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ गुणनखंड के गुणन के रूप में लिखते हैं।

उदाहरण 9 : $9x^2 - 30xy + 25y^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : $9x^2 - 30xy + 25y^2$

$$= (3x)^2 - 2(3x).(5x) + (5y)^2$$

जो $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है।

सूत्र $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के अनुसार

$9x^2 - 30xy + 25y^2$

$$= (3x)^2 - 2(3x)(5x) + (5y)^2$$

$$= (3x - 5y)^2$$

उदाहरण 10 : $36 - 12k + k^2$ के गुणनखंड ज्ञात कीजिए

हल : $36 - 12k + k^2$

$$= (6)^2 - 2(6)k + k^2$$

जो $a^2 - 2ab + b^2$ के रूप का है।

सर्वसमिका $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ के अनुसार

$$36 - 12k + k^2$$
$$= (6)^2 - 2(6)k + k^2$$
$$= (6 - k)^2$$

समूह विधि द्वारा

$$36 - 12k + k^2$$
$$= 36 - 6k - 6k + k^2$$
$$= 6(6 - k) - k(6 - k)$$
$$= (6 - k)(6 - k)$$
$$= (6 - k)^2$$

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट है कि

> **$a^2 - 2ab + b^2$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड $(a - b)(a - b)$ या $(a - b)^2$ है।**

अभ्यास 5(d)

1. निम्नांकित व्यंजकों में $(a^2 - 2ab + b^2)$ प्रकार के व्यंजकों को छाँटिए

   (i) $81a^2 - 72ab + 16b^2$ (ii) $16b^2 - 20by + 25y^2$

   (iii) $25x^2 - 10xy + 9$ (iv) $5x^2 - 30xy + 9y^2$

2. निम्नांकित के गुणनखंड कीजिए।

   (i) $4x^2 - 12xy + 9y^2$ (ii) $9x^2 - 6x + 1$

   (iii) $25x^2 - 60x + 36$ (iv) $49x^2 - 56x + 16$

   (v) $x^2 - 12xy + 36y^2$

5.5.3 दो वर्गों के अन्तर के रूप के व्यंजकों के गुणनखंड अर्थात $a^2 - b^2$ प्रकार के व्यंजकों के गुणनखंड

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ba - b^2$$
$$a^2 - b^2 = a(a - b) + b(a - b)$$
$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

यदि हम उपर्युक्त में दायें पक्ष $(a + b)(a - b)$ को आपस में गुणा करके सरल करें तो

$(a + b).(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2$

अर्थात् $(a + b)$ तथा $(a - b)$, व्यंजक $a^2 - b^2$ के दो गुणनखंड हैं।

उदाहरण 11: $a^2 - 1$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : सर्वप्रथम व्यंजक को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लिखते हैं।

$$a^2 - 1 = (a)^2 - (1)^2$$

अब वर्गों $(a)^2$ तथा $(1)^2$ के वर्गमूल क्रमशः a तथा 1 ज्ञात करते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखंड के सूत्र का प्रयोग करके दिये गये व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त करते हैं।

$$a^2 - 1 = (a)^2 - (1)^2$$
$$= (a + 1)(a - 1)$$

उदाहरण 12: $a^2 - 4b^2$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : इस व्यंजक का प्रथम पद a^2 को वर्ग के रूप में $(a)^2$ लिखते हैं, दूसरे पद $4b^2$ को वर्ग के रूप में $(2b)^2$ लिखते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखण्ड के सूत्र का प्रयोग करके व्यंजक का गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$$a^2 - 4b^2 = (a)^2 - (2b)^2$$
$$= (a + 2b)(a - 2b)$$

सत्यापन : $(a + 2b).(a - 2b) = a^2 + 2ab - 2ab - 4b^2$
$$= a^2 - 4b^2$$

उदाहरण 13: $4a^2 - 81$का गुणनखंड कीजिए।

हल : $4a^2 - 81 = (2a)^2 - (9)^2$
$$= (2a + 9)(2a - 9)$$

सत्यापन $(2a + 9)(2a - 9) = 4a^2 + 18a - 18a - 81$
$$= 4a^2 - 81$$

उदाहरण 14: $64a^2 - 225b^2$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $64a^2 - 225b^2 = (8a)^2 - (15b)^2$
$$= (8a + 15b)(8a - 15b)$$

> **दो वर्गों का अन्तर उन वर्गों के वर्गमूल के योग तथा उनके अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात् $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$**

यदि हम उपर्युक्त में दाये पद $(a+b)(a-b)$ को आपस में गुणा करके सरल करें तो

$(a+b).(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2$

अर्थात् $(a+b)$ तथा $(a-b)$, व्यंजक $a^2 - b^2$ के दो गुणनखंड हैं।

उदाहरण 11: $a^2 - 1$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : सर्वप्रथम व्यंजक को दो वर्गों के अन्तर के रूप में लिखते हैं।

$$a^2 - 1 = (a)^2 - (1)^2$$

अब वर्गों $(a)^2$ तथा $(1)^2$ के वर्गमूल क्रमशः a तथा 1 ज्ञात करते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखंड के सूत्र का प्रयोग करके दिये गये व्यंजक के गुणनखंड प्राप्त करते हैं।

$$a^2 - 1 = (a)^2 - (1)^2$$
$$= (a+1)(a-1)$$

उदाहरण 12: $a^2 - 4b^2$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : इस व्यंजक का प्रथम पद a^2 को वर्ग के रूप में $(a)^2$ लिखते हैं, दूसरे पद $4b^2$ को वर्ग के रूप में $(2b)^2$ लिखते हैं। पुनः दो वर्गों के अन्तर के गुणनखण्ड के सूत्र का प्रयोग करके व्यंजक का गुणनखण्ड प्राप्त करते हैं।

$$a^2 - 4b^2 = (a)^2 - (2b)^2$$
$$= (a+2b)(a-2b)$$

सत्यापन : $(a+2b).(a-2b) = a^2 + 2ab - 2ab - 4b^2$

$$= a^2 - 4b^2$$

उदाहरण 13: $4a^2 - 81$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $4a^2 - 81 = (2a)^2 - (9)^2$

$$= (2a+9)(2a-9)$$

सत्यापन $(2a+9)(2a-9) = 4a^2 + 18a - 18a - 81$

$$= 4a^2 - 81$$

उदाहरण 14: $64a^2 - 225b^2$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $64a^2 - 225b^2 = (8a)^2 - (15b)^2$

$$= (8a+15b)(8a-15b)$$

दो वर्गों का अन्तर उन वर्गों के वर्गमूल के योग तथा उनके अन्तर के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात् $(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)$

$$= \left(\frac{3}{x}+\frac{y}{5}\right)\left(\frac{3}{x}-\frac{y}{5}\right)$$

अभ्यास 5 (e)

निम्नांकित के गुणनखंड कीजिए :

1. $a^2 - 4$
2. $a^2 - 49b^2$
3. $x^3 - 121x$
4. $4a^2 - \frac{9}{4a^2}$
5. $\frac{18}{x^2}\ \frac{2x^2}{9}$
6. $(a-b)^2 - c^2$
7. $(a-3b)^2 - 36b^2$
8. $(a+b)^2 - (a-b)^2$
9. $25(a-5b)^2 - 4(a-3b)^2$
10. $16a^4 - 81b^4$
11. $a^4 - 625$
12. $a^2b - b^3$ का गुणनखंड कीजिए तथा प्राप्त परिणाम का $101^2 \times 100 - 100^3$ का मान ज्ञात करने में अनुप्रयोग कीजिए।
13. ऐसी कौन सी दो छोटी पूर्ण वर्ग संख्यायें है, जिनका अन्तर एक पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो ?

5.5.4 $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजकों का गुणनखंड

इस प्रकार के व्यंजकों में ऐसी दो संख्याएँ l और m लेते हैं कि $b = l + m$ तथा $ac = l \times m$ अर्थात् $c = \frac{l \times m}{a}$। अतः व्यंजक इस प्रकार हो जायेगा

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + (l+m)x + \frac{lm}{a}$$
$$= ax^2 + lx + mx + \frac{lm}{a}$$
$$= x(ax+l) + \frac{m}{a}(ax+l)$$
$$= (ax+l)(x+\frac{m}{a})$$

उदाहरण के लिए $2x^2 + 7x + 3$ का गुणनखण्ड ज्ञात करने के लिए दो संख्याएँ l और m प्राप्त करते हैं, कि $l + m = 7$ तथा $lm = 2 \times 3 = 6$। अतः अब ऐसे दो अभाज्य गुणनखण्ड सोचिए कि जिनका गुणन 6 हो तथा योगफल 7 हो।

ध्यान दीजिए -

अब हम $l = 3, m = 2$ लेते हैं, तो इनका गुणनफल तो 6 है, परन्तु योगफल $b = l + m = 3 + 2 = 5$ है, जो कि ऊपर दी गयी गुणनफल की शर्तों को पूरा नहीं करता है। अब यदि $l = 1, m = 6$ लें, तो $l \times m = 6$ तथा $l + m = 7$। अतः 6 उपर्युक्त गुणनफल की शर्तों को पूरा करते हैं।

अतः $l = 6$ और $m = 1$ रखने पर

$2x^2 + 7x + 3 = 2x^2 + (6+1)x + 3$

यहाँ $b = l + m = 6 + 1 = 7$

$c = \frac{l \times m}{a} = \frac{6 \times 1}{2} = 3$

$$\begin{aligned} 2x^2 + 7x + 3 &= 2x^2 + 6x + x + 3 \\ &= 2x(x + 3) + 1(x + 3) \\ &= (2x + 1)(x + 3) \end{aligned}$$

(ii) $ax^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का अन्य रूप $x^2 + bx + c$ के गुणनखण्ड

दोनों प्रकार के व्यंजकों में क्या अन्तर है ?

देखिए $ax^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक a है।

जबकि $x^2 + bx + c$ में x^2 का गुणांक मात्र 1 है।

अर्थात् यदि $ax^2 + bx + c$ में $a = 1$ रखे तो $x^2 + bx + c$ प्रकार का व्यंजक प्राप्त होगा।

$x^2 + bx + c$ प्रकार का व्यंजक $x^2 + (a + b)x + ab$ का ही रूप है।

अतः $x^2 + bx + c$ प्रकार के व्यंजक का गुणनखण्ड सर्वसमिका $(x+a)(x+b) = x^2 + (a + b)x + ab$ की सहायता से भी ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 20: $x^2 + 8x + 12$ गुणनखंड कीजिए कीजिए।

हल : यहाँ सर्वसमिका से तुलना करने पर

$a + b = 8, ab = 12$

अर्थात् दो ऐसी संख्याएँ ज्ञात करनी है, जिनका योगफल 8 है तथा गुणनफल 12 है।

यदि $a = 6, b = 2$ तो

$x^2 + 8x + 12$ की सर्वसमिका $x^2 + (a + b)x + ab$ से तुलना करने पर

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 12 &= x^2 + (6 + 2)x + 6 \times 2 \\ &= (x + 6)(x + 2) \end{aligned}$$

द्वितीय विधि

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 12 &= x^2 + (6 + 2)x + 12 \\ &= x^2 + 6x + 2x + 12 \\ &= x(x + 6) + 2(x + 6) \\ &= (x + 6)(x + 2) \end{aligned}$$

उदाहरण 21: $x^2 - x - 6$ गुणनखण्ड कीजिए

हल : व्यंजक $x^2 - x - 6$ की $[x^2 + (a + b)x + ab]$ से तुलना करने पर

$a + b = -1 = (-3) + 2$

और $ab = -6 = -3 \times 2$

$$\begin{aligned} \therefore \quad x^2 - x - 6 &= x^2 + (-3 + 2)x + (-3) \times 2 \\ &= (x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab]$

द्वितीय विधि

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= x^2 + (-3 + 2)x - 6 \\ &= x^2 - 3x + 2x - 6 \\ &= x(x - 3) + 2(x - 3) \\ &= (x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

उदाहरण 22: $x^2 - 7x + 12$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : व्यंजक $x^2 - 7x + 12$ की सर्वसमिका $[x^2 + (a + b)x + ab]$ से तुलना करने पर

$a + b = -7 = (-4) + (-3)$

$ab = 12 = (-4) \times (-3)$

$$\begin{aligned} \text{अतः} \quad x^2 - 7x + 12 &= x^2 + (-4 - 3)x + (-4)(-3) \\ &= (x - 4)(x - 3) \end{aligned}$$

$[\because (x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab]$

द्वितीय विधि

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 12 &= x^2 + (-4 - 3)x + 12 \\ &= x^2 - 4x - 3x + 12 \end{aligned}$$

$= x(x-4) - 3(x-4)$

$= (x-4)(x-3)$

नोट $x^2 - 7x + 12 = x^2 - (4+3)x + 12$ द्वारा भी हल कर सकते हैं।

उदाहरण 23 : $x^2 + 2x - 15$ के गुणनखण्ड कीजिए।

हल : $x^2 + 2x - 15$

$(\because a+b = 2 = (5-3);\ a \times b = 15 = 5 \times 3)$

$= x^2 + (5-3)x - 15$

$= x^2 + 5x - 3x - 15$

$= x(x+5) - 3(x+5)$

$= (x+5)(x-3)$

उदाहरण 24 : $2x^2 + 9x - 5$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $2x^2 + 9x - 5$ का गुणनखंड करने के लिए दो संख्याएँ a तथा b ऐसी चाहिए कि

$a + b = 9$

और $ab = 2 \times (-5) = -10$

चूँकि $10 + (-1) = 9$ और $10 \times (-1) = -10$

अतः $a = 10$ और $b = -1$ उपयुक्त संख्याएँ हैं

इस प्रकार $2x^2 + 9x - 5 = 2x^2 + [10 + (-1)]x - 5$

$= 2x^2 + 10x - x - 5$

$= 2x(x+5) - 1(x+5)$

$= (x+5)(2x-1)$

उदाहरण 25 : $12y^2 - y - 1$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : गुणनखंड के लिए दो संख्याएँ a तथा b ऐसी चाहिए कि

$a + b = -1$ और $ab = 12 \times (-1) = -12$

चूँकि $-4 + 3 = -1$ और $(-4) \times 3 = -12$

अतः $a = -4$ और $b = 3$ उपयुक्त संख्याएँ हैं।

इस प्रकार $12y^2 - y - 1 = 12y^2 + (-4+3)y - 1$

$= 12y^2 - 4y + 3y - 1$

$= 4y(3y-1) + 1(3y-1)$

$= (3y-1)(4y+1)$

उदाहरण 26 : $-5x^2 - x + 4$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $-5x^2 - x + 4$

$= -[5x^2 + x - 4]$ [सुविधा के लिए चिह्न परिवर्तन किया गया है

$= -[5x^2 + 5x - 4x - 4]$ [सोचिए $a + b = 1 = 5 + (-4)$ तथा $ab = 5 \times (-4)$, $a = 5$, $b = -4$]

$= -[5x(x+1) - 4(x+1)]$

$= -(x+1)(5x-4)$

$= (1+x)(4-5x)$

उदाहरण 27 : $12x^3 - 14x^2 - 10x$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $12x^3 - 14x^2 - 10x = 2x(6x^2 - 7x - 5)$

$= 2x[6x^2 - 10x + 3x - 5]$

$= 2x[2x(3x-5) + 1(3x-5)]$

$= 2x(3x-5)(2x+1)$

[सोचिए $a + b = -7 = -10 + 3$,

$ab = 6 \times (-5)$

$= -30 = (-10) \times 3$

$a = -10,\ b = 3$]

उदाहरण 28 : $15x^4 + 3x^2 - 18$ का गुणनखंड कीजिए।

हल : $15x^4 + 3x^2 - 18 = 3[5x^4 + x^2 - 6]$

$= 3[5y^2 + y - 6]$ [जहाँ $x^2 = y$]

$= 3[5y^2 + 6y - 5y - 6]$ [सोचिए $a + b = 1 = 6 + (-5)$

$= 3[y(5y+6) - 1(5y+6)]$ $ab = 5 \times (-6)$

$= 3(5y+6)(y-1)$ $a = 6,\ b = -5$]

$= 3(5x^2+6)(x^2-1)$ [$y = x^2$ प्रतिस्थापन करने पर]

$= 3(5x^2+6)(x+1)(x-1)$

अभ्यास 5 (f)

1. दो पूर्णांक a तथा b ऐसे ज्ञात कीजिए कि
   - (i) $a + b = 8$ और $ab = 15$
   - (ii) $a + b = 13$ और $ab = 12$
   - (iii) $a + b = 1$ और $ab = -20$
   - (iv) $a + b = -5$ और $ab = 4$
   - (v) $a + b = -1$ और $ab = -12$
   - (vi) $a + b = -11$ और $ab = 10$
   - (vii) $a + b = 8$ और $ab = -20$

2. गुणनखंड कीजिए :
   - (i) $x^2 + 5x + 6$ (ii) $q^2 + 6q + 8$
   - (iii) $m^2 + 11m + 24$ (iv) $y^2 + 9y - 36$
   - (v) $a^2 + 3a - 10$ (vi) $k^2 - 11k - 102$
   - (vii) $p^2 - 5p - 176$ (viii) $48 + 2x - x^2$
   - (ix) $-11p + p^2 + 24$ (x) $y^2 - 26y + 69$
   - (xi) $a^4 - 5a^2 + 36$ (xii) $y^4 + 4y^2 - 32$
   - (xiii) $2x^3 + 10x^2 - 28x$ (xiv) $-2y^3 + 22y^2 + 24y$

     (संकेत : 2x सर्वनिष्ठ गुणनखंड लें)
   - (xv) $12x + 15 - 3x^2$ (xvi) $40p^3 + 16p^2q - 2p^3q^2$
   - (xvii) $-18k^4 + 3k^5 - 48k^3$ (xviii) $b^2c^3 + 8bc^4 + 12c^5$
   - (xix) $-18 + a^2b^2 - 3ab$

गुणनखण्ड कीजिए

3. $4x^2 + 5x + 1$
4. $2x^2 + 11x + 14$
5. $2y^2 - 5y - 12$
6. $13k^2 + 37k - 6$
7. $40y^2 + y - 6$
8. $6 - 9e - 27e^2$
9. $1 - t - 6t^2$
10. $2a^2 + 7ab - 15b^2$
11. $4y^2 + 24y + 20$
12. $12a^2 + 2a - 4$
13. $21k^3 + 15k^2 - 6k$
14. $6x^3 - 22x^2 - 8x$
15. $-21z^4 - 12z^3 + 6z^2$
16. $-12b^3 - b^2 + b$
17. एक आयताकार पार्क का क्षेत्रफल $5x^2 + 17x + 6$ वर्ग मी० है। उसकी एक भुजा $(x + 3)$ है, तो दूसरी संलग्न भुजा ज्ञात करें।
18. एक वर्ग का क्षेत्रफल $(4x^2 - 36x + 81)$ वर्ग मी. है, तो उसकी भुजा ज्ञात करें। यदि $(x = 5)$ तो वर्ग की भुजा एवं क्षेत्रफल का मान क्या होगा।

सामूहिक चर्चा

भाग द्वारा ज्ञात कीजिए कि क्या
- (क) $x^3 - 8$ का $(x - 2)$ एक गुणनखंड है ?
- (ख) $x^3 + 27$ का $(x + 3)$ एक गुणनखंड है ?
- (ग) $x^3 + 64$ का $(x^2 - 4x + 16)$ एक गुणनखंड है ?
- (घ) $x^4 - y^4$ का $x + y$ एक गुणनखंड है ?
- (ङ) $x^3 - 216$ का $(x - 6)$ एक गुणनखंड है ?

दक्षता अभ्यास – 5

1. भाग दीजिए :
   - (i) $y^2 - 18y + 69$ में $(y + 5)$ से,
   - (ii) $x^3 - y^3$ में $(x - y)$ से,
   - (iii) $x^4 - y^4$ में $(x + y)$ से,
   - (iv) $(6a^2 + 7ab - 20b^2)$ में $(3a - 4b)$ से,
   - (v) $10x^3 - 39x^2 + 41x - 15$ में $(2x - 5)$ से।
2. भागफल एवं शेषफल ज्ञात कीजिए :
   - (i) $(9x^3 - 45x^2 + 71x - 40) \div (3x - 8)$
   - (ii) $(27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3) \div (3a - b)$
   - (iii) $(6x^3y^3 - 4x^2y - 8y^2) \div (-2xy)$
   - (iv) $(-9x^3y^3 - 6x^2y^2 + 12x^2y^3) \div (-3x^2y^3)$
   - (v) $(4x^3y^3 - 2x^2y^3 + 6x^3y^2) \div (-2x^2y^2)$
3. निम्नांकित व्यंजकों के गुणनखंड कीजिए :
   - (i) $1 - x^2$ (ii) $64a^4 - 49b^2c^4$
   - (iii) $x^2y^2 - 4$ (iv) $\frac{1}{4}b^2 - 49$

इकाई - 6 संख्याओं से खेल

- दो तथा तीन अंकों की संख्या को व्यापक रूप में लिखना तथा समझना
- चार मूल संक्रियाओं (+, –, × तथा ÷) में रिक्त संख्याओं को ज्ञात करना
- संख्या पहेली और खेल
- 2, 3, 5, 7, 9, 11 और 13 से विभाज्यता के नियम ज्ञात करना

6.1 भूमिका

संख्याएँ सदैव आश्चर्यों की स्रोत रही हैं तथा ये स=ष्टि की भाँति ही विस्मयकारी हैं। इनका इतिहास उतना ही पुराना है जितना कि मानव सभ्यता का। यह कहना अतिशयोक्ति न होगा कि मानव-सभ्यता का मनोहारी भवन संख्याओं के विकास की नींव पर ही खड़ा है। यही कारण है कि मनुष्य ने संख्याओं के साथ मित्रवत् व्यवहार किया है तथा इनके साथ प्रारम्भ से ही अनेक खेल खेलें हैं। आज का संसार संख्याओं का संसार है। प्रातः उङ्ने से लेकर रात्रि में सोने तक स्त्री-पुरुष, बालक-बालिका, युवक-युवती, डाक्टर-इंजीनियर, किसान-मजदूर आदि सभी लोग संख्याओं के संसार में भ्रमण करते रहते हैं। दिनचर्या के समस्त कार्यक्रम किसी न किसी संख्या से जुड़े होते हैं, जैसे प्रात: 5 बजे उङ्ना, एक कप चाय पीना, 2- 3 किलोमीटर टहलना, 9 बजे प्रात: स्वल्पाहार करना, 10 बजे कार्यालय अथवा कार्य पर जाना, आदि।

संख्याओं को लेकर न जाने कितनी पहेलियाँ बनाई गई हैं और आज भी बनाई जा रही हैं, जिसका उदाहरण है जापानी सुडोवूâ, जिसे भरने में हर आयु-वर्ग के लोगों को आनन्द मिलता है। आज सुडोवूâ प्रायः सभी दैनिक समाचार पत्रों की शोभा बढ़ा रहे हैं। महान गणितज्ञ रामानुजन ने भी संख्याओं के अनेक चमत्कारों से संसार को अवगत कराया है। स्वयं दाशमिक प्रणाली भी किसी चमत्कार से कम नहीं जिसमें केवल दस संकेतों(0,1,2,3,4,5,6,7,8 और 9) की सहायता से बड़ी से बड़ी और छोटी से छोटी संख्याएँ लिखी जा सकती हैं। इस इकाई में संख्याओं के कतिपय मनोरंजक रूपों, खेलों और पहेलियों पर चर्चा की गई है।

6.2 दो तथा तीन अंकों की संख्याओं को व्यापक रूप में लिखना तथा समझना :

हम जानते हैं कि

$18 = 10 \times 1 + 8$
$27 = 10 \times 2 + 7$
$69 = 10 \times 6 + 9$
$80 = 10 \times 8 + 0$

प्रयास कीजिए :

(ग) अपनी अभ्यास-पुस्तिका में उपर्युक्त विधि का अनुसरण कर निम्नांकित समिकाओं में रिक्त स्थानों को भरिए-

15 = □ $\frac{6}{8}$ 1 + □
42 = 10 × □ + 2
60 = 10 × □ + □
99 = □ × □ + □

(ii) दो अंकों से बनी कुछ संख्याएँ लेकर उपर्युक्त विधि से संख्याओं की समिकाएँ बनाइए।

हम जानते हैं कि उपर्युक्त समिकाओं में दायें पक्ष में संख्याओं को दाशमिक प्रणाली के आधार पर व्यक्त किया गया है। दो अंकों वाली संख्याओं में दायाँ अंक इकाई का अंक है तथा बायां अंक दहाई का अंक है। इसी कारण उपर्युक्त उदाहरणों में 18 में अंक 1 का स्थानीय मान 10952.ज्हु1= 10 है, 27 में 2 का स्थानीय मान 10957.ज्हु2= 20 है, इत्यादि।

अतः इससे निष्कर्ष प्राप्त होता है कि यदि दहाई का बीजीय अंक a हो तथा इकाई का बीजीय अंक ◌ं हो तो संख्या का मान

$10 \times a + b = 10a + b$ होता है।

हम जानते हैं कि अंक दस होते हैं, यथा,

हम जानते हैं कि अंक दस होते हैं, यथा,

0,1,2,3,4,5,6,7,8 और 9; अत:
दो अंकों की संख्या a◌ं का व्यापक रूप 10a +b होता है जहाँ a तथाb बीजीय अंक हैं। स्पष्टत: a शून्य को छोड़कर तथा b शून्य से लेकर 9 तक के अंक हैं।

पुन: देखिए,

$345 = 100 \times 3 + 10 \times 4 + 5$
$416 = 100 \times 4 + 10 \times 1 + 6$
$500 = 100 \times 5 + 10 \times 0 + 0$
$999 = 100 \times 9 + 10 \times 9 + 9$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त विधि से 247, 484, 875 तथा 907 को लिखिए ।

- बताइए कि 365 में 3 का स्थानीय मान कितना है ?
- 405 में शून्य का स्थानीय मान कितना है ?
- 817 में 7 का स्थानीय मान कितना है ?

तीन अंकों से बनी संख्याओं में यदि बीजीय अंकों का प्रयोग करें तो उनका व्यापक रूप क्या होगा? दाशमिक प्रणाली के आधार पर यदि म्, ं तथा a क्रमश: इकाई, दहाई तथा सैकड़ा के अंक हों तो संख्या 100a + 10ं + म्होगी। अतः इससे निष्कर्ष प्राप्त होता है कि :

तीन अंकों की संख्या aंम् का व्यापक रूप 100a + 10ं + म् होता है जहाँ a , ं, म् बीजीय अंक हैं। स्पष्टत: यहाँ a शून्येतर अंक है जबकि, ं तथा म् शून्य से लेकर 9 तक के अंक हैं ।

टिप्पणी - ध्यान दें, यदि a शून्य का अंक हो जाय तो दो अंकों की व्यापक संख्या 10a + ं केवल एक अंक की संख्या बन जायेगी तथा इसी प्रकार a के शून्य होने पर तीन अंकों की व्यापक संख्या 100a + 10ं + म्केवल दो अंकों की संख्या रह जायेगी।

6.3 चार मूल संक्रियाओं (+, –, × तथा ÷)में रिक्त संख्याओं को ज्ञात करना

(ग) निम्नांकित योग-संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

2 ❀
+ 4 8
+ 9 5
———
1 6 6
———

ध्यान दीजिए कि उपर्युक्त योग-संक्रिया में प्रतीक '□' लुप्त अंक है, जिसका मान ज्ञात किया जाना है ।

अब इकाई के अंकों का योगफल =❀ + 8 + 5

· ❀ + 13

· 10 + (❀ + 3)

अत: योगफल में इकाई का अंक =❀ + 3
· 6
अत: =❀ · 6 – 3
· 3 अर्थात् लुप्त अंक 3 है।
पुन: देखिए,
3 7
+ ❀6
+ 8 8
———
1 7 1

यहाँ इकाई के अंकों का योगफल =7 + 6 + 8= 21
जहाँ 2 दहाई का अंक है अत: योग-संक्रिया में इसे बायीं ओर हासिल के रूप में दहाई के अंक के स्थान पर स्थानान्तरित किया जायेगा। अत: अब दहाई के अंकों का योगफल e = 2 + 3
+ ❀ + 8
= ❀ + 13
जो उपर्युक्त योगफल में 17 के बराबर है।
अत: ❀ + 13 = 17
∴ ❀ = 17 – 13
= 4
प्रयास कीजिए :

• उपर्युक्त की भांति निम्नांकित योग-संक्रियाओं में लुप्त अंको के मान ज्ञात कीजिए :
(i) 3 ❀ **(ii)** 5 6 **(iii)** 8 2 **(iv)** 4 5 3
7 6 7 2 5 5 ❀ 5 6
2 3 ❀ 7 9 9 1 2 8
——— ——— ———
1 3 7 2 1 5 ❀ 3 6 9 3 7
——— ——— ——— ———

(गग) अब निम्नांकित व्यवकलन (घटाने) की संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

9 8
– ❀5
———
5 3

यहाँ दहाई के स्थान पर व्यवकलन-संक्रिया में,

9 – ❀ = 5, जहाँ ❀ लुप्त अंक का प्रतीक है।

अत: ❀ = 9 – 5

= 4

पुन: निम्नांकित व्यवकलन-संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

8 3

– 2 ❀

———

5 5

———

यहाँ इकाई के स्थान पर 3 में से ❀ (लुप्त अंक) घटाने पर 5 प्राप्त होता है जिससे स्पष्ट है कि □ का अंकीय मान 3 से बड़ा है । अतः घटाने की संक्रिया सम्पन्न करने के लिए दहाई के स्थान से 8 में से एक दहाई दायीं ओर इकाई के स्थान पर स्थानान्तरित करना होगा,

अत: अब

(10 + 3) - ❀ = 5

∴ ❀ = 10 + 3 – 5

= 8

यहाँ यह भी द्रष्टव्य है कि दहाई के स्थान से एक दहाई, इकाई के स्थान पर स्थानान्तरित करने पर अब वहाँ शेष दहाइयाँ = 8 – 1

= 7

अत: 7 में से 2 घटाने पर 5 प्राप्त होता है, जो दिया है ।

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित व्यवकलन संक्रियाओं में लुप्त अंकों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) 8 9 (ii) 7 6

– 6 ❀ – 4 ❀

——— ———

2 5 2 8

——— ———

(iii) 8 4 (iv) 8 0 3

– ❀ 8 – 2 ❀ 6

——— ———

1 6 5 6 7

——— ———

(iii) निम्नांकित गुणन-संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

5 6
× 2 X

1 3 4 4

ध्यान दें, यहाँ गुणक के इकाई के स्थान पर अक्षर संख्या 1089.ज्हु है। 1094.ज्हु का मान ज्ञात करना है।

56 2 = 56 (20 +)

= 1120 + 56
= 1344
अत: 1120 + 56 = 1344
56 = 1344 – 1120
या, 56 = 224

$\therefore x = \frac{224}{56}$

= 4

पुन: निम्नांकित गुणन-संक्रिया का अवलोकन कीजिए -

X 6
× 7 3

6 2 7 8

यहाँ 1169.ज्हु का अर्थ है कि दहाई के रिक्त स्थान पर अक्षर संख्र्या लिखी है जिसका मान ज्ञात करना है ।

अब 6 73 = (10 x + 6) 73
= 730 + 438
= 6278
अत: 730 x = 6278 - 438
= 5840
x = = 8

प्रयास कीजिए :

- उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित गुणन-संक्रियाओं में बीजीय अंकों के अंकीय मान ज्ञात कीजिए-

(i) 3 6 (ii) 4
5 3 8

900 1596

(vi) अब निम्नांकित भाग-संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

2) 84 (7

...

0

यहाँ भाजक में दहाई के रिक्त स्थान पर अक्षर संख्र्या े लिखी है जिसका मान ज्ञात करना है।

भाग-संक्रिया के नियम से हम जानते हैं कि

भाज्य =भाजक ² भागफल ± शेषफल

अर्थात् $84 = 2 \times 7 + 0$

या, $84 = (10x + 2) \times 7$

या, $84 = 70x + 14$

या $x =$

अतः भाजक 12 है

निम्नांकित भाग -संक्रिया का अवलोकन कीजिए :

2) 96 (4

....

4

जहाँ भाजक के इकाई के रिक्त स्थान पर अक्षर संख्र्या े है जिसका मान ज्ञात करना है ।

यहाँ भाग-संक्रिया के नियमानुसार,

$2 \times 4 = 96 - 4$

या, $](20 + x) \times 4 = 92$

या, $80 + 4x = 92$

ाIqजससे, $\frac{1}{2} \times \left(\frac{2+3}{4}\right)$

$= 3$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित भाग-संक्रियाओं में पुष्पांकित संकेतों के अंकीय मान ज्ञात कीजिए :

(i) ❁ 4) 82(5 (ii) ❁ 1)105(5
... ...

12 0

(iii) 2 ❁) 110 (4 (vi) 27) 217 (❁
... ...

2 ❁

6.4 संख्या पहेली तथा खेल

संख्याओं का संसार अद्‌भुत है, इसमें मनोरंजन की अनेक मनमोहक संरचनाएँ देखने को मिलती हैं। मानव-सभ्यता के विकास के साथ ही संख्याओं का इतिहास प्रारम्भ होता है तथा अनेक गणितज्ञों ने संख्याओं के साथ भरपूर मनोरंजक खेल खेले हैं। पहेलियाँ बनार्इं और सुलझायाR हैं। उन्हीं में से कुछ का प्रस्तुतीकरण किया जा रहा है।

किसी संख्या का वर्ग करना जिसमें इकाई का अंक 5 हो :

मान लीजिए (1304.ज्हु 5)एक संख्या है जिसमें इकाई का अंक 5 है तथा दहाई का अंक अक्षर संख्र्या े है।

अब ▢ 5)^2 = $(10x + 5)^2$
$= 100x^2 + 100x + 25$
$= 100x (x + 1) + 25$
$= \overline{x(x+1)}25$

उदाहरण : मान लीजिए 75 का वर्ग करना है तो सर्वप्रथम 25 लिख लीजिए और पुनः 25 के पहले (अर्थात् उसकी बायाR ओर) 71319.ज्हु(7 + 1) का मान अर्थात् 56 लिख लीजिए। यही 75 का वर्ग होगा।

अर्थात्$(75)^2 = 5625$

इसी प्रकार $(95)^2 = \overline{9(9+1)}25$
$= 9025$
$(125)^2 = \overline{12(12+1)}\ 25$
$= 15625$

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त की भाँति 45, 85, 135 और 165 के वर्ग ज्ञात कीजिए ।

अंक पहेलियाँ :

(1) तीन अंकों की कोई भी संख्या लीजिए। उसे एक कागज पर यथोचित स्थान पर लिख लीजिए। अब उसी संख्या को दुबारा कागज पर पहले से लिखी संख्या के चाहे बायाR ओर अथवा चाहे दायाR ओर सीध में लिख लीजिए । इस प्रकार अब आप को छह अंकों वाली एक नयाr संख्या प्राप्त हो जाती है ।

अब इस नयाr संख्या में सर्व प्रथम 7 से भाग दीजिए। इस प्रकार प्राप्त भागफल में पुन: 11 का भाग दीजिए और फिर जो नया भागफल प्राप्त होता है, उसमें पुन: 13 का भाग दीजिए। इस प्रकार प्राप्त अंतिम भागफल को ध्यान से देखिए। चौंक गये न आप! आप को वही संख्या दुबारा प्राप्त हो गई न, जिसे आप ने पहले लिखा था ।

उदाहरण : मान लीजिए, आप ने 453 चुना। अब 453 की सीध में बायाR ओर अथवा दायाR ओर

453 लिखने पर प्राप्त नयाr संख्या= 453453

अब उपर्युक्त वर्णित क्रिया निम्नवत् करते हैं-

7 453453

11 64779

13 5889

453

इसी प्रकार आप तीन अंकों की कोई भी संख्या लेकर उपर्युक्त खेल, खेल सकते हैं ।

सत्यापन : ध्यान दीजिए कि 453453= 453 × 1001

और 1001= 7 × 11 × 13

(2) कोई भी संख्या लेकर उसमें से उसके अंकों का योगफल घटाने पर प्राप्त नयाr संख्या सदैव 9 से पूरी-पूरी विभाजित होती है ।

उदाहरणार्थ867 - (8 + 6 + 7) = (800 + 60 + 7) - (8 + 6 + 7)

= (800 - 8) + (60 -6) + (7 -7)

= 792 + 54 + 0

= 9 × 88 + 9 × 6

= 9 × (88 +6)

= 9 × 94

726 - (7 + 2 + 6) = (700 + 20 + 6) - (7 + 2 + 6)

= (700 - 7) + (20 - 2) + (6 - 6)

= 693 + 18 + 0

= 9 × 77 + 9 × 2

$= 9 \times (77 + 2)$

$= 9 \times 79$

इसी प्रकार आप भी कोई भी संख्या चुनकर उपर्युक्त खेल का आनन्द उङ्गा सकते हैं।
अब इसी चमत्कार के बल पर हम लुप्त अंक का खेल खेलते हैं।
आप कोई भी तीन अंकों की संख्या मन में सोच लीजिए। उसके अंकों का योग उस संख्या में से घटाकर नयाr संख्या को आप चाहें तो मन में ही स्मरण कर रख लें अथवा चाहें तो किसी कागज पर लिख लें। अब इस नयाr संख्या के किसी भी अंक को काटकर अथवा लुप्त कर हमें शेष अंकों को बता दीजिए। हम आप को बता देंगे कि आपने नयाr संख्या का कौन-सा अंक काटा अथवा लुप्त किया था।
उदाहरणार्थ,
याfद आप की सोची हुई संख्या 762 है तो 762 में से अंकों का योग (7 + 6 + 2) अर्थात् 15 घटाने पर नयाr संख्या 747 प्राप्त होगी। मान लीजिए, आप ने 747 में 4का अंक लुप्त कर दिया है और शेष दोनों अंक 7 और7 हमें बता दिये हैं। अब हम लुप्त अंक बताने के लिए आप द्वारा बताये गये अंकों 7 और 7 का योगफल 7 + 7= 14ज्ञात कर यह देखेंगे कि इसके निकटतम आगे आने वाले 9 के अपवत्र्य, जो यहाँ 18 है, से यह कितना कम है । स्पष्टत: 18 -14= 4अत: आप का लुप्त अंक 4है । मानलीजिए कि 747 में से आप ने एक 7 का अंक लुप्त कर शेष दो अंक 4और 7 हमें बताया हो तो उस दशा में भी लुप्त अंक बताने के लिए हम उपर्युक्त प्रक्रिया ही अपनायेंगे। अत: इस दशा में देखेंगे कि बताये गये अंकों 4और 7 का योगफल (4+ 7) अर्थात् 11 इसके आगे आने वाले 9 के निकटतम अपवत्र्य 18 से कितना कम है। स्पष्टत: यह 7 कम है। अत: लुप्त अंक 7 है।
टिप्पणी :
यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि सोची गयाr (अथवा ली गयाr) सख्ंया में से अंकों का योगफल घटाने पर प्राप्त नयाr संख्या में याfद कोई अंक शून्य अथवा 9 आ जाता है तो उसको लुप्त न कीजिए क्योंकि उस दशा में शेष अंकों के योगफल 9 से पूरे-पूरे विभाजित हो जायेंगे और तब लुप्त अंक की अद्वितीयता समाप्त हो जायेगी। यह 0 अथवा 9 में से क्या होगा, ङ्खीक-ङ्गीक नहीं बताया जा सकता ।
(3) तीन अंकों की कोई एक ऐसी संख्या चुनिए जिसमें इकाई और सैकड़ा के अंकों का अन्तर 1 से अधिक हो । अब इस संख्या के अंकों के क्रम को उलट कर एक नयाr संख्या प्राप्त कीजिए। पुनः मूल संख्या और नयाr संख्या का अन्तर ज्ञात कीजिए। इस प्रकार प्राप्त अन्तर वाली संख्या में इसके अंकों के क्रम को उलटने से प्राप्त नयाr संख्या को जोड़िए । आप पायेंगे कि यह योगफल सदैव 1089 ही होगा।
उदाहरण : मानलीजिए कि आपने 853 को चुना है। (यहाँ इकाई और सैकड़ा के अंकों का अन्तर स्पष्टत: 1 से अधिक है जो उपर्युक्त वर्णित नियम के अनुसार ङ्खीक है।)
अब 853 के अंकों का क्रम उलटने पर प्राप्त नयाr संख्या= 358
अब मूल संख्या और प्राप्त नयाr संख्या का अन्तर

$= 853 - 358$

$= 495$

पुन: इसके अंकों का क्रम उलटने पर प्राप्त संख्या =594
अब हम देखते हैं कि
495 तथा 594का योगफल

= 495 + 594
= 1089
उपर्युक्त की भाँति आप तीन अंकों की कोई भी दूसरी संख्या, जिसमें इकाई और सैकड़ा के अंकों का अन्तर 1 से अधिक हो, चुनकर यह खेल खेल सकते हैं।
सत्यापन :
माना तीन अंकों की सख्या
$100a + 10b + c$ .... (1) है, जहाँ a, b तथा c क्रमशः सैकड़ा, दहाई तथा इकाई के अंक हैं तथा a और c के बीच का अन्तर 1 से अधिक है।
अब अंकों का क्रम उलटने पर नयाr संख्या
$100c + 10b + a$ .... (2) होगी।
अब (1) से (2) घटाने पर,
$100(a - c) + 0 + (c - a)$
या, $100(a - c) - 100 + 100 + (c - a)$
या, $100(a - c - 1) + 90 + (10 + c - a)$ ....(3)
उपर्युक्त संख्या के अंकों को उलटने पर पुन: नयाr संख्या
$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)$ ....(4)
अत: (3) और (4) को जोड़ने पर,
$100(a - c - 1 + 10 + c - a) + 180 + (10 + c - a + a - c - 1)$
$= 900 + 180 + 9 = 1089$
शिक्षार्थियों की सहभागिता से कतिपय गणित के खेल एवं पहेलियाँ :

(1) दो शिक्षार्थियों के बीच का खेल :

मान लीजिए A और ँ दो सहपाङ्गी हैं। इन्हें क्रमानुसार 1 से 6 तक का कोई अंक बोलने को कहा जाय । खेल A के बोलने से प्रारम्भ कीजिए। A के बाद ँ, फिर ँ के बाद A, फिर A के बाद ँ, ... इसी क्रम से आगे बढ़ा जाय । साथ ही बोले गये अंकों का उत्तरोत्तर योग करते जाएं। योगफल की कोई एक सीमा जो 50, 60, ... (अधिकतम 100) हो, खेल प्रारंभ होने के पहले ही निर्धारित कर ली जाय। खेल जीतने की शर्त यह होगी कि जिस शिक्षार्थी के द्वारा बोले गये अंक को उत्तरोत्तर योगफल में सम्मिलित करते ही योगफल पूर्व निर्धारित सीमा वाली संख्या के ङ्खीक बराबर हो जाता है, वही शिक्षार्थी विजयाr घोषित किया जायेगा। स्पष्ट है कि दोनों सहपाङ्गियों को सतर्वâतापूर्वक 1 से 6 के बीच के अंक बोलने होंगे तथा सदैव उत्तरोत्तर प्राप्त होने वाले योगफल को ध्यान में रखना होगा
।
यह खेल 6 के स्थान पर 7, 8 या 9 लेकर भी खेला जा सकता है। जीतने का रहस्य विद्यार्थी स्वयं खोजें।

(2) संख्या बूझने का खेल :

इस खेल में कक्षा के सभी शिक्षार्थी एक साथ भाग ले सकते हैं। सभी शिक्षार्थियों को 1 से 9 तक का कोई अंक लेने को कहा जाय। ली गयाr संख्या में 5 से गुणा कर गुणनफल में 6 जोड़ने को कहा जाय। पुन: इस प्रकार प्राप्त योगफल में 4से गुणा कर गुणनफल में 9 जोड़ने को कहा जाय। इस नये योगफल में पुन: 5 से गुणा करने को कहा जाय। अब इस अंतिम गुणनफल को शिक्षार्थियों से एक-एक करके पूछिए तथा उसमें से 165 घटाकर शेषफल को 100 से भाग देकर भागफल ज्ञात कीजिए। यही भागफल वाली संख्या उस शिक्षार्थी द्वारा प्रारंभ में लिया गया अंक होगा।

संख्या (शिक्षार्थी द्वारा लिया गया अंक) किस प्रकार से बूझी जाती है, यह शिक्षार्थियों की सहभागिता से ज्ञात किया जाय ।

इसी प्रकार से बूझने के अन्य प्रश्न-पहेलियाँ शिक्षार्थियों से बनवायाr जायँ ।

(3) संख्या बूझने की एक और पहेली :

किसी शिक्षार्थी को 10 से छोटी दो संख्याएं लेने को कहा जाय। पुन: पहली संख्या के पाँच गुने में 7 जोड़कर प्राप्त योगफल में 2 का गुणा करने को कहा जाय। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में ली गयाr दूसरी संख्या जोड़ने को कहा जाय। इस प्रकार प्राप्त योगफल उस शिक्षार्थी से बताने को कहा जाय।

योगफल में से 14घटाकर जो संख्या प्राप्त होती है, उसके अंक ही उस शिक्षार्थी द्वारा प्रारंभ में ली गयाr संख्याएँ होंगी ।

इस पहेली के बूझने का रहस्य शिक्षार्थियों की सहायता से जाना जाय ।

उदाहरण : मान लीजिए शिक्षार्थी ने 10 से छोटी दो संख्याएँ क्रमश: 3 एवं 8 लिया है ।

अब उपर्युक्त वर्णित क्रियानुसार,

$$\{2(5\times3+7)+8\}-14 = \{44+8\}-14$$

$= 38$

जो शिक्षार्थी द्वारा ली गयाr संख्याओं (अंकों) 3 और 8 से बनी है।

एक और उदाहरण देखिए।

याfद ली गयाr संख्याएँ 7 एवं 3 हो, तो

उपर्युक्त क्रियानुसार,

$$\{2\times(5\times7+7)+3\}-14 = \{84+3\}-14$$

$= 73$

जो ली गयाr संख्याओं (अंकों) 7 एवं 3 से बनी है ।

6.5 2, 3, 5, 7, 9, 11 तथा 13 द्वारा दो अथवा तीन अंकों से बनी व्यापक रूप वाली संख्याओं के विभाज्यता के नियम को प्रतिपादित करना

2 से विभाज्यता का नियम :

देखिए,

$25 = 20 + 5$

अब याfद 25 को 2 से भाग दें तो

$$25 \div 2 = (20+5)\div 2$$

$$= (20 \div 2) + (5 \div 2)$$

$$\frac{p^2}{4q}$$

जिससे स्पष्ट है कि 25 में 2 का पूरा-पूरा भाग नहीं जाता है, क्योंकि उक्त संख्या में इकाई वाला अंक 5, 2 से विभाज्य नहीं है ।
इसी प्रकाऱ
47 = 40 +7
अत: 47 में भी 2 का पूरा-पूरा भाग नहीं जा सकता क्योंकि इकाई वाला अंक 7, 2 से विभाज्य नहीं है।
अब 28 1411.ज्हु2 पर विचार कीजिए।
यहाँ 28 = 20 + 8
अतŠ 28 ÷2 = 20 ÷ 2 + 8 ÷2
= 10 + 4
= 14
अर्थात् 28 , 2 से विभाज्य है ।
प्रयास कीजिए :
उपर्युक्त की भाँति निम्नांकित संख्याओं की 2 से विभाज्यता की जांच कीजिए- 14, 23, 26, 54, 59
हम देखते हैं कि दो अंकों वाली व्यापक संख्या
$(10x + y)$ में 2 का भाग देने पर हमें प्राप्त होता है-
$(10x + y) \div 2 = 5x + \frac{y}{2}$
अब यािद इकाई का अंक 1441.ज्हु, 2 से विभाज्य है तो दो अंकों वाली व्यापक संख्या 1446.ज्हु, 2 से सदैव विभाज्य होगी ।
उपर्युक्त से निष्कर्ष प्राप्त होता है कि-
दो अंकों से बनी कोई भी संख्या 2 से केवल तभी विभाज्य होगी जब उस संख्या का इकाई वाला अंक 2 से विभाज्य हो, अर्थात् जब इकाई वाला अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 हो । ऐसी संख्याओं को समसंख्या भी कहते हैं।

अब तीन अंकों से बनी संख्याओं पर विचार किया जाय ।
हम जानते हैं कि तीन अंकों वाली व्यापक संख्या 100a + 10 ं + म् होती है जहाँ a शून्येतर तथा ं, म् शून्य से लेकर 9 तक के अंक हैं ।
अत: $(100\,a + 10\,b + c) \div 2$
$= (50\,a + 5\,b) + (c \div 2)$
यहाँ ध्यातव्य है कि यािद म् अर्थात् इकाई वाला अंक 2 से विभाज्य है तो पूरी संख्या भी 2 से विभाज्य हो जायेगी, अन्यथा नहीं ।
उदाहरण :
(1) 353= 300 + 50 + 3, जहाँ 300 तथा 50 तो 2 से विभाज्य हैं किन्तु 3, 2 से विभाज्य नहीं है ।
अत: 353 भी 2 से विभाज्य नहीं होगी ।
(2) 672, 2 से विभाज्य है क्योंकि
672= 600 + 70 + 2 में प्रत्येक भाग 2 से विभाज्य है ।

प्रयास कीजिए :
इसी प्रकार,
575, 189, 366, 288 की 2 से विभाज्यता की जांच कीजिए ।

इस प्रकार हम निष्कर्ष प्राप्त करते हैं कि-
तीन अंकों से बनी कोई भी संख्या 2 से केवल तभी विभाज्य होगी याfद उस संख्या का इकाई वाला अंक 2 से विभाज्य हो, अर्थात् जब इकाई वाला अंक 0, 2, 4, 6 अथवा 8 हो।

नोट : उपरोक्त निष्कर्ष तीन से अधिक अंकों वाली संख्याओं पर भी लागू होता है।
3 तथा 9 से विभाज्यता का नियम :
हम देखते हैं कि दो अंकों वाली व्यापक संख्या
$10\,a + b = (9 + 1)\,a + b$
$= 9a + (a + b)$

$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9+1)b + c$

$= 99a + 9b + a + b + c$

$= 9(11a + b) + (a + b + c)$

इसमें भी प्रथम भाग 3 तथा 9 से विभाज्य है। अब याfद द्वितीय भाग 1482.ज्हुभी 3 अथवा 9 से विभाज्य हो, तभी उपर्युक्त संख्या 3 अथवा 9 से विभाज्य होगी, अन्यथा नहांr ।
उदाहरण :
(1) 72 में अंकों का योग= 7 + 2
= 9, जो 3 तथा 9 से विभाज्य है ।
अत: 72 भी 3 तथा 9 से विभाज्य है ।
(2) 729 में अंकों का योगफल= 7 + 2 +9
= 18, जो 3 तथा 9 से विभाज्य है ।
अत: 729 भी 3 तथा 9 से विभाज्य है।
□ प्रयास कीजिए :

(1) निम्नांकित संख्याओं की 3 तथा 9 से विभाज्यता की जांच कीजिए :
216, 726, 525, 1008, 3735
(2)क्या 71, 98 और 112 भी 3 से विभाज्य हैं ? याfद नहीं तो क्यों ?

उपर्युक्त उदाहरणों से निष्कर्ष निकलता है कि :
दो या तीन अंकों की कोई भी संख्या तभी 3 तथा 9 से विभाज्य होती है जब उसके अंकों का योगफल 3 तथा 9 से विभाज्य हो।
नोट : उपरोक्त निष्कर्ष तीन से अधिक अंकों वाली संख्याओं पर भी लागू होता है।
5 से विभाज्यता का नियम :

हम देखते हैं कि

55, 5 से विभाज्य है, 70, 5 से विभाज्य है, 125, 5 से विभाज्य है,

किन्तु 62, 78, 89, 91, 94आदि 5 से विभाज्य नहीं हैं ।

द्रष्टव्य है कि दो अंकों वाली व्यापक संख्या 10a + ◌̇ में प्रथम भाग 10a , 5 से विभाज्य है। अब याfद द्वितीय भाग ◌ भी 5 से विभाज्य हो, तभी संख्या 5 से विभाज्य होगी ।

इसी प्रकार तीन अंकों वाली व्यापक संख्या

$$100a + 10b + c = (100a + 10b) + c$$

$$= 10(10a + b) + c$$

जिसमें प्रथम भाग $10(10a + b)$, 5 से विभाज्य है ।

अब याfद द्वितीय भाग म् भी 5 से विभाज्य हो, तभी संख्या 5 से विभाज्य होगी, अन्यथा नहीं। ध्यान देने योग्य है कि म् तभी 5 से विभाज्य होगा जब म् शून्य अथवा 5 हो। इस प्रकार हमें निष्कर्ष प्राप्त होता है कि-

दो या तीन अंकों से बनी संख्याएँ तभी 5 से विभाज्य होंगी जब इकाई वाला अंक शून्य हो अथवा 5 हो।

नोट : उपरोक्त निष्कर्ष तीन से अधिक अंकों वाली संख्याओं पर भी लागू होता है।

7 से विभाज्यता के नियम

किसी संख्या के 7 से विभाज्यता की जांच के लिए उस संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार, लाख, दस लाख, ... के अंकों में क्रम से 1, 3, 2, -1, --3, -2, ... से गुणाकर उनका योगफल ज्ञात करना चाहिए। याfद यह योगफल 7 से पूर्णत: विभाजित होता है तो दी हुई संख्या भी 7 से पूरी-पूरी विभाजित होगी। याfद संख्या 6 अंको से अधिक अंकों की है, तो इनकी पुनराव=त्ति की जा सकती है। एक उदाहरण द्वारा इसे स्पष्ट करते हैं-

उदाहरण : 2, 39, 10, 551 की 7 से विभाज्यता की जाँच कीजिए ।

उपर्युक्त नियमानुसार, हम देखते हैं कि

इकाई का अंक $\times 1 = 1 \times 1 = 1$

दहाई का अंक $\times 3 = 5 \times 3 = 15$

सैकड़ा का अंक $\times 2 = 5 \times 2 = 10$

हजार का अंक $\times (-1) = 0 \times (-1) = 0$

दस हजार का अंक $\times (-3) = 1 \times (-3) = -3$

लाख का अंक $\times (-2) = 9 \times (-2) = -18$

दस लाख का अंक $\times 1 = 3 \times 1 = 3$

करोड़ का अंक $\times 3 = 2 \times 3 = 6$

योगफल= 14, जो 7 से विभाज्य है ।

अत: दी हुई संख्या 2, 39, 10, 551 भी 7 से विभाज्य होगी ।
इसी प्रकार कुछ और संख्याएँ लेकर उनकी 7 से विभाज्यता की जांच कीजिए ।
उपर्युक्त नियम का सत्यापन:
तीन अंकों वाली व्यापक संख्या $N = 100a + 10b + c$ लीजिए जहाँ इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंक क्रमश: c, b और a हैं।
अब उपर्युक्त नियमानुसार क्रम से c, b और a में 1, 3 और 2 से गुणा करने पर योगफल $S = 2a + 3b + c$
अत : $6S = 12a + 18b + 6c$
अत:

$\sqrt[3]{-x^3} = -x = -\sqrt[3]{x^3}$

$= 7(16a + 4b + c)$

इस प्रकार $N + 6S$, 7 से विभाज्य है। अतः याfद N, 7 से विभाज्य है तो 1629.ज्हु भी 1634.ज्हुसे विभाज्य होगा। इससे इंगित होता है कि 1639.ज्हु भी 1644.ज्हुसे विभाज्य होगा ।
विलोमतः याfद 1649.ज्हु, 1655.ज्हुसे विभाज्य है तो 1660.ज्हुभी 1665.ज्हु से विभाज्य है ।

11 से विभाज्यता का नियम

किसी संख्या के 11 से विभाज्यता की जांच करने के लिए उस संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार, दस हजार, लाख, दस लाख, ... वाले अंकों में क्रमानुसार 1,-1, 1,-1,1,-1, 1,... का गुणा कर इनका योगफल ज्ञात कीजिए। याfद यह योगफल 11 से पूरा-पूरा विभाजित होता है तो दी हुई संख्या भी 11 से पूरी-पूरी विभाजित होगी ।
उदाहरण : 99, 62, 425 की 11 से विभाज्यता की जाँच कीजिए ।
उपर्युक्त नियमानुसार हम देखते हैं कि

$5(1) + 2(-1) + 4(1) + 2(-1) + 6(1) + 9(-1) + 9(1)$

$= 5 - 2 + 4 - 2 + 6 - 9 + 9$

$= 11$, जो 1685.ज्हु से विभाज्य है।
अत1690.ज्हु दी हुई संख्या भी 11 से विभाज्य होगी ।
उपर्युक्त नियम का सत्यापन
मान लीजिए चार अंकों वाली व्यापक संख्या $1000a + 100b + 10c + d$ की 11 से ◌Iqवभाज्यता की जांच करनी है। यहाँ इकाई, दहाई, सैकड़ा तथा हजार के अंक क्रमश d, c, b और 1711.ज्हुहैं।
अब उपर्युक्त नियमानुसार,

$S = d(1) + c(-1) + b(1) + a(-1)$

$= -a + b - c + d$

अत: $N - S = (1000a + 100\,b + 10\,c + d) - (-a + b - c + d)$

$= 11\,(91\,a + 9\,b + c)$, जो 11 से पूरा-पूरा विभाजित होता है।

अब याfद N, 11 से विभाज्य है तो S भी 11 से विभाज्य होगा। विलोमत:, याfद $\sqrt{36}$, 11 से विभाज्य है तो N भी 11 से विभाज्य होगा ।

प्रयास कीजिए :

कुछ संख्याएँ अपनी इच्छा से चुनकर उनकी 11 से विभाज्यता की जाँच कीजिए ।

13 से विभाज्यता का नियम

किसी संख्या की 13 से विभाज्यता की जांच करने के लिए क्रमसे उसके इकाई, दहाई, सैकड़े, हजार, दस हजार, लाख, ... वाले अंकों में -1, 3, 4, 1, -3, -4, ... का गुणा कर उनका योगफल ज्ञात कीजिए। याfद यह योगफल 13 से विभाज्य है तो दी हुई संख्या भी 13 से विभाज्य होगी।

उदाहरण :

10, 66, 195 की 13 से विभाज्यता की जॉच कीजिए ।

उपर्युक्त नियमानुसार,

$= 5 \times (-1) + 9 \times 3 + 1 \times 4 + 6 \times 1 + 6 \times (-3) + 0 \times (-4) + 1 \times (-1)$

$= -5 + 27 + 4 + 6 - 18 + 0 - 1$

= 13 जो 13 से विभाज्य है।

अतः दी हुई संख्या भी 1751.ज्हुसे विभाज्य होगी ।

उपर्युक्त नियम का सत्यापन :

मान लिया N तीन अंकों की एक संख्या है,

अत: $N = 100a + 10b + c$; जहाँ 1767.ज्हुऔर 1772.ज्हुक्रमश: इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंक हैं ।

अब $S = 4a + 3b - c$

अत: $N + S = 104a + 13b$

$= 13(8a + b)$

जो 13 से विभाज्य है ।

अत: याfद N, 13 से विभाज्य है, तो ए भी 13 से विभाज्य होगा ।

विलोमतः, याfद ए, 13 से विभाज्य है, तो N भी 13 से विभाज्य होगा ।

प्रयास कीजिए :

कुछ संख्याएँ अपनी इच्छा से चुन कर उनकी 13 से विभाज्यता की जाँच कीजिए।

सामूहिक चर्चा

1. दो अंकों की किसी संख्या में इकाई का अंक 3 तथा दहाई का अंक 7 है। वह संख्या बताइए।
2. प्रश्न-1 के अंकों को परस्पर अदल-बदल करने से बनने वाली संख्या बताइए।

3. 342 के अंकों को उल्टे क्रम में लिखने पर कौन-सी संख्या प्राप्त होती है?

4. 83 के अंकों को परस्पर बदलने से प्राप्त संख्या को मूल संख्या से घटाने पर कौन-सी संख्या मिलती है?

5. निम्नांकित प्रश्नों में ् का आंकिक मान बताइए ।

(i) 2 8 (ii) 7 3 2
+ 3 2 – 2× 7
+ × 7
4 4 5
1 2 7

(iii) 4 8 (iv) √4) 3 6 (6
× √9 ....

1 4 4 0

अभ्यास -6(a)

1. निम्नांकित प्रश्नों में लुप्त अंकों (अथवा बीजीय अंकों) को ज्ञात कीजिए-

(i) 2 □ (ii) 8 8 ❁ (iii) 7 2 ❁
+ □ 8 + 9 0 5 + 6 ❁ 9
+ 9 5 + ❁ 1 2 + ❁ 1 8

1 8 6 2 4 0 0 1 7 0 2

(iv) 8 7 (v) 4 □ 5 (vi) 6 7 2
– 2 □ – 2 8 1 – 2 ❁ 5

5 8 1 9 4 ❁ 8 7

(vii) 6 8 (viii) 9 3 (i*x*) 8 7 2
× ☒ × ☒ 7 × 3

6 1 2 2 5 1 1 3 0 5 2 0

(*x*) 2) 2 1 6 (8 (*xi*) 42) 886 (1 (*xii*) 7) 907 (24
....

0 4 1 9

2. ज्ञात कीजिए कि 828, 2340, 38046, 77514, 893408 और 100116 में से कौन-सी संख्या 3 से विभाज्य नहीं है?

3. उपर्युक्त प्रश्न (7) में कौन-सी संख्याएँ 9 से विभाज्य है ं?

4. निम्नांकित संख्याओं में से 7, 11 और 13 से विभाज्य संख्याओं को छाँट कर अलग-अलग कीजिए।

329623, 63271, 492895, 25179, 38632, 96283, 25137

5. निम्नांकित संख्याओं में 5 से भाग देने पर शेषफल ज्ञात कीजिए।

8034, 97446, 85405, 83560

7. क्या 722722 के अपवर्तक 7, 11 और 13 है ं ?

8. एक संख्या 576 है। इसमें से इसके अंकों का योगफल घटा देते हैं। बताइए कि अन्तरफल 9 का कितने गुना है ?

9. एक संख्या 1904.ज्हु 46 है जहाँ ि बीजीय अंक है। इसके अंकों को उलट कर प्राप्त होने वाली संख्या को मूल संख्या से घटाने पर 297 प्राप्त होता है। 1909.ज्हु का मान ज्ञात कीजिए ।

10. 2 अथवा 5 से विभाज्य 1 से 100 तक के पूर्णांकों का योग होगा :

(क) 2550 (ख) 3050

(ग) 3550 (घ) 3600

संकेत : 1 से ह तक प्राकृतिक संख्याओं का योग $\frac{216}{343}$ होता है।

हमने क्या चर्चा की ?

1. दो अंकों की संख्या का व्यापक रूप्e 10 $a + b$ होता है, जहाँ a तथा ं बीजीय अंक हैं। स्पष्टतः यहाँ a शून्येतर तथा ं शून्य से लेकर 9 तक के अंक हैं।

2. तीन अंकों की संख्या का व्यापक रूप 100 a + 10 b + c होता है, जहाँ a, ं तथा म् बीजीय अंक हैं। स्पष्टतः यहाँ a शून्येतर तथा ं और म् शून्य से ले कर 9 तक के अंक हैं।

3. कुछ संख्या-पहेलियों तथा संख्या खेलों की चर्चा की गयाr।

4. 2, 3, 5, 7, 9, 11 तथा 13 द्वारा बनी संख्याओं के विभाज्यता के नियमों का प्रतिपादन किया गया। इन नियमों के बीजगणितीय सत्यापन किये गये।

= 56 (20 +)

= 1120 + 56

= 1344

अत: 1120 + 56

= 1344

उत्तर माला

अभ्यास 6 (a)

1. (i) प्रथम पंक्ति में 3, द्वितीय पंक्ति में 6, (गग) प्रथम पंक्ति में 3, त=तीय पंक्ति में 6, (गगग) प्रथम पंक्ति में 5, द्वितीय पंक्ति में 5, त=तीय पंक्ति में 3, (ग्न) 9, (न) 7, (नग)द्वितीय पंक्ति में 8, त=तीय पंक्ति में 3, (vii) 9, (viii) 2, (ix) 5, (x) 7, (xi) 2, (xii) 3; **2.** 893408; **3.** 828, 2340, 100116, **4.** 7 से विभाज्य संख्याएँ 329623, 25179 **एवं 25137 11 से विभाज्य संख्याएँ** 25179, 38632, 96283, 13 **से विभाज्य संख्याएं**3271, 492895; **5.** 4, 1, 0, 0; **7. हाँ ; 8. 62 गुना;9.** 9; **10.** (Ke) 3050;

इकाई - 7 दो अज्ञात रशि वाले रेखीय समीकरण

(युगपतá समीकरण)

- **दो अज्ञात रशियों वाले युगपतá समीकरण एवं उनके अनुप्रयोग**
- **दो अज्ञात रशियों वाले वर्तिक प्रश्नों का युगपतá समीकरणों द्वारा हल**

8.1 भूमिका

हम पिछले अध्याय में एक अज्ञात चर वाले रेखीय समीकरण को बनाना, हल करना, तथा इसकी सत्यता की जाúच करने की विधि से अवगत हो चुके हैं| अब हम यहाú पर दो अज्ञात चर वाले रõखिक समीकरण युग्म यथा $a1x + b1y + c1 = 0$ एवं $a2x + b2y + c2 = 0$ के हल करने का अध्ययन करेंगे।

यहाú समीकरणों $a1x + b1y + c1 = 0$ और $a2x + b2y + c2 = 0$ में x और y दो अज्ञात चर है तथा a1, a2, b1, b2, तथ c1, c2 अचर रशियाँ हैं| इस प्रकार के समीकरण को युगपतá समीकरण कहते हैं| युगपत का अर्थ साथ-साथ होना। यहाú हम देखेंगे कि प्रथम समीकरण में x के सापेक्ष y के विभिन्न मानों में से x और y के जो मान द्वितीय समीकरण को सन्तुष्ट करता है, वही युगपतá समीकरण का हल होगा।

8.2 युगपत समीकरण का हल

सर्वप्रथम हम निम्न तीन उदाहरणों पर ध्यान दें ज्र्

1. दो अज्ञात चर वाले रõखिक समीकरण $2x + y = 5$ और 3x ज्र् y = 10 के हल पर विचार करें।

इनका हल ज्ञात करने के लिए दोनों समीकरणों के द्वारा x के विभिन्न मानों के सापेक्ष y के विभिन्न मानों को ज्ञात कर सारणीबद्ध करते हैं|

समीकरण $2x + y = 5$ में x के सापेक्ष y के मान की सारणी

समीकरण 3x ज्र् y = 10 में x के सापेक्ष y के मान की सारणी

x	1	2	3	4	0	–1	–2	–3	–4
y	3	1	–1	–3	5	7	9	11	13

दोनों सारणियों को देखने से स्पष्ट है कि दोनों में केवल $x = 3$ और y = ज्र् 1 उभयनिष्ठ है। अत:

$x = 3$ और y = ज्र् 1 समीकरणों $2x + y = 5$और 3x ज्र् y = 10 को संतुष्ट करते हैं| इसलिए $x = 3$ और y = ज्र् 1 इन समीकरणों का हल हो गया।

2. अब हम समीकरण युग्म $x + 3y = 5$ और $2x + 6y = 10$ के हल पर विचार करें। यहाú हम देखते हैं कि दोनों समीकरण एक दूसरे से भिन्न नहाé हैं| पहले समीकरण के दोनों

पक्षों में 2 से गुणा करने पर दूसरा समीकरण प्राप्त हो जाता है।

अत: ये दोनों समीकरण स्वतन्त्र समीकरण नहाé हैं| बल्कि एक ही समीकरण को प्रदर्शित करते हैं, इसलिए xऔर y के अनन्त मान संतुष्ट करेंगे। यहाú विशेष रुप से ध्यान देना है कि दो अज्ञात चर वाले समीकरण का आद्वितीय हल प्राप्त करने के लिए दो विशिष्ट समीकरणों की आवश्यकता होती है।

3. अंत में हम समीकरण युग्म x + 3y = 5 और 2x + 6y = 7 पर विचार करें। यहाú हम देखते हैं कि x और y का कोई मान जो समीकरण x + 3y = 5 को सन्तुष्ट करता है, 2x + 6y = 7 को कदपि सन्तुष्ट नहाé करेगा। ‡‹योंकि यदिx, y के किसी मान के लिए x + 3y = 5 हो तो 2x + 6y = 2 (x + 3y) = 10 होगा जो कदपि 7 नहाé हो सकता। अत: दोनों समीकरणों को संतुष्ट करने वाला x और y का कोई मान नहाé होगा।

इन उदाहरणों में हम देखते हैं कि केवल प्रथम स्थिति में ही समीकरणों का आद्वितीय हल प्राप्त होता है। यदि हम ध्यान दे तो पाते हैं कि प्रथम स्थिति में

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

अर्थातá $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ •ाब कि दोनों स्थितियों में

इस प्रकार

दो अज्ञात चर वाले रõखिक समीकरणों $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ **तथा**

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ **को युगपतá समीकरण कहते हैं यदि**

1049.png

8.3 युगपतá समीकरण को हल करने की विधियाँ

युगपत समीकरण को सारणी बनाकर हल करते समय हमने देखा कि सारणी बना कर युगपतá समीकरणों को हल करने की विधि सुविधाजनक नहाé है। इसलिए प्राय: निम्नांकित दो विधियों का प्रयोग युगपतá समीकरणों को हल करने में किया जाता है ज्र् (i) प्रतिस्थापन विधि (ii)विलोपन विधि

8.3.1 प्रतिस्थापन विधि ज्र्

इस विधि के अन्तर्गत हम एक समीकरण से एक अज्ञात चर का मान दूसरे अज्ञात चर के पद में व्य‡‹त करके उसे दूसरे समीकरण में प्रतिस्थपित कर दूसरे अज्ञात चर का मान ज्ञात करते हैं और पिŠर उस चर का मान किसी समीकरण में प्रतिस्थपित करके प्रथम अज्ञात चर को ज्ञात करते हैं| इसलिए इस विधि को प्रतिस्थापन विधि कहते हैं|

उदाहरण 1 : हल कीजिए $x + 2y = 7$ .... (1)

$2x + y = 5$........... (2)

हल : समीकरण (1) द्वारा

x = 7 ज्र् 2y ।।।।। (3)

1054.png समीकरण (1) तथा (2) युगपत समीकरण हैं,

1059.png समीकरण (1) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) को संतुष्ट करना चहिए।

अत: समीकरण (3) से प्राप्त x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थपित करने पर,

$2(7 - 2y) + y = 5$

या, $14 - 4y + y = 5$

या, $14 - 3y = 5$

या, $-3y = 5 - 14$ (पक्षान्तर करने पर)

या, $-3y = -9$ (चिन्ह बदलने पर)

या, $3y = 9$

या, $y =$ ■

$\therefore y = 3$

अब y का यह मान समीकरण (3) में प्रतिस्थपित करने पर,

$x = 7 - 2 \times 3$

$= 7 - 6$

$\times\ x = 1$

अत:युगपतd समीकरणों का हल $x = 1$ और $y = 3$ है।

सत्यापन : x और y के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर ज्

बायाँ पक्ष $= x + 2y = 1 + 2 \times 3$

$= 1 + 6$

$= 7$

= दायाँ पक्ष

$\boxed{x}$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

x और y के मान समीकरण (2) में प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष $= 2x + y = 2 \times 1 + 3 = 5 =$ **दायाँ पक्ष, अत: हल सही है।**

उदाहरण 2 : हल कीजिए

$2x + 5y = 12$ .... (1)

$4x + 9y = 22$ .... (2)

हल : समीकरण (1) द्वारा

$2x = 12 - 5y$

$x = \left(\frac{2}{7}\right)$ .... (3)

x का यह मान समीकरण (2) में प्रतिस्थपित करने पर,

$\left(\frac{2}{7}\right) = 22$

या, $2(12 - 5y) + 9y = 22$

या, $24 - 10y + 9y = 22$

या, $24 - y = 22$

या, $y = 24 - 22$

$y = 2$

अब y का मान समीकरण (3) में रखने पर

$x = \left(\frac{2}{7}\right)$

$= \left(\frac{2}{7}\right)$

$=$

$= 1$

,ातः उपर्यु‡‹त युगपतá समीकरणों का हल x = 1 और y = 2 है।सत्यापन : x और y के मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष= $2x + 5y$

$= 2 \times 1 + 5 \times 2$

$= 2 + 10$

$= 12$

= **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में x और y के मान प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष= $4x + 9y$

$= 4 \times 1 + 9 \times 2$

$= 4 + 18$

$= 22$

= **दायाँ पक्ष**

अतः उत्तर सही है।

8.3.2 विलोपन विधि

कभीॼकभी दिये गये युगपत समीकरणों को मात्र जोüडने अथवा एक को दूसरे से घटाने पर एक चर का विलोप हो जाता है अर्थातá प्राप्त समीकरण में केवल एक अज्ञात चर रह जाता है, जिसे हल करने पर उसका मान ज्ञात हो जाता है। चर के प्राप्त इस मान को दिये गये किसी भी समीकरण में प्रतिस्थपित करने पर दूसरे चर का मान ज्ञात हो जाता है। इस प्रकार से युगपतá समीकरणों को हल करने की ि%‰ाŠया को विलोपन विधि कहते हैं|

यादि किसी भी चर के गुणांक समान (अथवा विपरीत चिह्न के साथ समान) न हों, तो किसी भी एक चर के गुणांकों को समान कर लेते हैं| शेष ि%‰ाŠया उ‡‹तवतá होती है।

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$x + y = 7$

$2x - y = 8$

हल : उपर्यु‡‹त युगपतá समीकरणों में y के गुणांक दोनों समीकरणों में समान एवं विपरीत है, इसलिए दोनों

समीकरणों को जोüडने पर,

$x + y = 7$ .... (1)

$2x - y = 8$ .... (2)

$\frac{5}{3}$

$3x = 15$, y का विलोपन हो गया

$x = \frac{3}{2}$ या , $x = 5$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर,

$5 + y = 7$

$\left(\frac{3}{2}\right)^3$ $y = 7 - 5$

$= 2$

अत: समीकरण का हल x = 5 और y = 2 है।

सत्यापन :

समीकरण (1) में $x = 5$,ौर y = 2 प्रतिस्थपित करने पर,

बायाँ पक्ष $= x + y = 5 + 2 = 7 =$ **दायाँ पक्ष**

समीकरण (2) में x = 5 और y = 2 प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष $= 2x - y = 2 \times 5 - 2 = 10 - 2 = 8 =$ **दायाँ पक्ष**

उदाहरण 3 : हल कीजिए

$x + 2y = 5$ ...... (1)

$x + 3y = 7$ ...... (2)

हल : उपर्यु‡‹त युगपतá समीकरणों में x के गुणांक दोनों समीकरणों में समान है। अत: समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर

$-y = -2$

$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3 \times \frac{3}{2}$ $y = 2$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर,

$x + 2 \times 2 = 5$

या, $x + 4 = 5$

या, $x = 5 - 4$

$\therefore x = 1$

सत्यापन : समीकरण (1) में x = 1 और y = 2 प्रतिस्थपित करने पर,

बायाँ पक्ष $= x + 2y = 1 + 2 \times 2 = 1 + 4 = 5 =$ दायाँ पक्ष

समीकरण (2) में x = 1 और y = 2 प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष $= x + 3y = 1 + 3 \times 2 = 1 + 6 = 7 =$ दायाँ पक्ष

अत: युगपतá समीकरणों का हल सही है।

उदाहरण 4 : हल कीजिए :

$3x + y = 5$ ...... (1)

$5x + y = 9$ ....(2)

हल : चूúकि दोनों समीकरणों में y के गुणांक समान हैं, इसलिए समीकरण (1) में से समीकरण (2) घटाने पर,

$-2x = -4$

या, $2x = 4$

$\frac{5}{5}$ $x = 2$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$3 \times 2 + y = 5$ या $y = 5 - 6 = -1$

सत्यापन : समीकरण (1) में $x = 2$ और $y = -1$ प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष $= 3x + y = 3 \times 2 + (-1)$

$= 6 - 1$

$= 5 =$ दयाँ पक्ष

समीकरण (2) में $x = 2$ और $y = -1$ प्रतिस्थपित करने पर

बायाँ पक्ष $= 5x + y = 5 \times 2 + (-1)$

$= 10 - 1$

$= 9 =$ दायाँ पक्ष

अत: युगपतá समीकरणों का हल सही है।

उदाहरण 5 : हल कीजिए :

$3x + y = 4$ ..... (1)

$x + 2y = 3$ ..... (2)

हल : उपर्यु‡‹त युगपतá समीकरणों में x तथा y किसी के भी गुणांक बराबर नहाé है। अत: x के गुणांक बराबर करने के लिए समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर

$3x + 6y = 9$ ...... (3)

अब समीकरण (1) में से समीकरण (3) घटाने पर

$-5y = -5$

या, $5y = 5$

या, $y = \frac{3}{3}$

$y = 1$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$3x + 1 = 4$

या, $3x = 4 - 1$

या, $3x = 3$

या, $x = \therefore$

$\frac{4}{3}$ $x = 1$

अत: समीकरणों का हल x = 1 तथा y = 1 है।

सत्यापन : समीकरण (1) में x = 1और y = 1 प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष = 3x + y = 3 ह= 1 + 1 = 3 + 1 = 4 = दायाँ पक्ष

समीकरण (2) में x = 1 और y = 1 प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष = x + 2y = 1 + 2 ह= 1 = 3 = दायाँ पक्ष

अत: हल सही है।

टिप्पणी : ध्यान दें, जिस समीकरण में एक चर का मान प्रतिस्थापित करके दूसरे चर का मान ज्ञात किया जाता है, हल का सत्यापन करने के लिए उस समीकरण में मान प्रतिस्थापित करने की आवश्यकता नहाé है। दूसरे समीकरण में

अज्ञात चरों के मान प्रतिस्थापित करके हल का सत्यापन करना पर्याप्त होगा।

उदाहरण 6 : हल कीजिए :

$7x - 6y = 20$ .... (1)

$3x + 4y = 2$ .... (2)

हल : उपर्यु‡‹त युगपतá समीकरणों में x तथा y किसी के भी गुणांक बराबर नहाé है। हम जानते हैं कि युगपतá समीकरणों के दोनों समीकरणों को जोüडकर या एक दूसरे से घटा कर किसी अज्ञात का विलोप तभी कर सकते हैं, जब उस अज्ञात के गुणांक समान हों। अत: उपर्यु‡‹त समीकरणों में y को विलोप करने के लिए पहले y के गुणांक बराबर करते हैं| इसके लिये y के गुणांकों 6 और 4 का लघुतम समापवर्त्य 12 ज्ञात करते हैं| अब दोनों समीकरणों में y का गुणांक 12 करने के लिए, समीकरणों (1) के दोनों पक्षों में 2 से और समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करते हैं|

,अत: $14x - 12y = 40$ .... (3)

$9x + 12y = 6$ .... (4)

समीकरणों (3) और (4) को जोüडने पर,

$23x = 46$

या, $x = \therefore$

$-\frac{6}{6}$ $x = 2$

x का मान समीकरण (1) में रखने पर,

$7 \times 2 - 6y = 20$

या, $14 - 6y = 20$
या, $-6y = 20 - 14$
या, $-6y = 6$
$6y = -6$ (चिन्ह बदलने पर)

या, $y =$
$y = -1$
अत: समीकरणों का हल x = 2 और y = - 1 है।
सत्यापन : समीकरण (2) में x = 2 और y = -1 1 प्रतिस्थपित करने पर
बायाँ पक्ष = 3x + 4y = 3 ह= 2 + 4 ह= (-1) = 6 - 4 = 2 = दायाँ पक्ष
अत: हल सही है।
अभ्यास 8(a)
1. x के मान y के पदों में लिखिए :

(i) $x - y = 4$ **(ii)** $2x + 4y = 6$ **(iii)** $x + y = 2$
2. y y के मान x के पदों में लिखिए :

(i) $5x - y = 9$ **(ii)** $6x - 2y = 10$ **(iii)** $2x + \quad y = 4$
3. हल कीजिए (सारणी विधि से) :
(i) $x + y = 4$ **(ii)** $5x = y$
$5x + 12y = 13$ $2x + y = 7$
4. हल कीजिए (प्रतिस्थापन विधि से) :
(i) $x - y = 4$ **(ii)** $x - y = -6$
$3x + 2y = 27$ $x + y = -18$
(iii) $3x + 2y = 0$ **(iv)** $2x - 5y - 16 = 0$
$2x + y = -1$ $3x + 4y - 1 = 0$
5. हल कीजिए :
(i) $x - y = 3$ **(ii)** $x = -y + 1$
$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 6$ $2y = x - 4$
(iii) $\frac{1}{3}x + y = 1$ **(iv)** $1.5x + 2.5y = 21$
$\frac{x}{7} + \frac{y}{5} = 3$ $x - 7y = 4$ $4x + y = 22$
6. हल कीजिए :
(i) $x + y = 3$ **(ii)** $2x + y = 3$
$x - y = 1$ $2x - y = 1$

(iii) $x + 2y = 2$ **(iv)** $3x - y = 4$

$x - y = -1$ $2x - y = 2$

7. हल कीजिए तथा उत्तर की जाúच कीजिए :

(i) $2x - 3y = 13$ **(ii)** $3x - y = -2$

$7x - 2y = 20$ $3x + 4y = -17$

(iii) $3x + y = 4$

$x + 2y = 3$

8. निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए।

(i) $3(x + 2y) = 10y + 5$ **(ii)** $\frac{x}{2} - \frac{y}{5} = 4$

$2(x + 2y) = 3x + 2$ ∴

(iii) $.5x - 7y = 2$

$3.4x - 4.4y = 15.4$

8.4 दो अज्ञात रशियों वाले वर्तिक प्रश्नों का युगपतå समीकरणों द्वारा हल :

जिन वर्तिक प्रश्नों में दो शतô दी हुई होती हैं, उन्हें हल करने के लिए दो अज्ञात रशियों को x और y (या अन्य कोई बीज) मानकर दी हुई शताô के आधार पर दो रõखिक समीकरण प्राप्त करते हैं| प्राप्त समीकरणों को हल करके अज्ञात रशियों के मान ज्ञात कर लेते हैं| यद्यपि ऐसे वर्तिक प्रश्नों को एक चर वाले रõखिक समीकरणों द्वारा भी हल किया जा सकता है, परन्तु दो चर वाले रõखिक समीकरणों की सहायता से हल करना आधिक सरल और सुविधाजनक होता है।

उदाहरण 7 : एक आयत की लम्बाई, उसकी चौüडाई से 5 सेमी आधिक है। यादि आयत का परिमाप 40 सेमी हो, तो इसकी लम्बाई तथा चौüडाई ज्ञात कीजिए।

हल ञ्ञ् एक चर वाले रõखिक समीकरण की सहायता से ञ्ञ्

मान लीजिए कि आयत की चौüडाई = x सेमी।

चूúकि लम्बाई, उसकी चौüडाई से 5 सेमी आधिक है इसलिए

आयत की लम्बाई = (x + 5) सेमी।

अत: आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौüडाई)

= 2 (x + 5 + x) सेमी

= (4x + 10) सेमी

परन्तु आयत का परिमाप 40 सेमी ज्ञात है।

∴ $4x + 10 = 40$

या, $4x = 40 - 10$

या, $4x = 30$

$a = \frac{x}{3}, \; b = \frac{y}{5}$ $x =$

अत: आयत की चौüडाई = 7I5 सेमी

और इसकी लम्बाई = (7I5 + 5) सेमी

= 12.5 सेमी

अब इसे युगपतá समीकरण से हल करते हैं ञ्

मान लीजिए कि आयत की लम्बाई x सेमी और चौüडाई y सेमी है।

1224.png लम्बाई, चौüडाई से 5 सेमी आधिक है

■ $x - y = 5$ .... (1)

आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौüडाई)

= 2 (x + y) सेमी

परन्तु आयत का परिमाप 40 सेमी है।

⊠ $2(x + y) = 40$

या, $x + y = 20$ .... (2)

Ôãमी‡ãŠÀ¥ãão (1) तथा (2) ‡ãŠãñ •ãããñü¡¶ãñ ¹ãÀ,

$2x = 25$

█ $x = \therefore = 12.5$

x का मान समीकरण (2) में प्रतिस्थपित करने पर,

$12.5 + y = 20$

$\therefore y = 20 - 12.5 = 7.5$

अत: आयत की लम्बाई = 12.5 सेमी

और उसकी चौüडाई = 7I5 सेमी

सत्यापन : चूúकि लम्बाई = 12.5 सेमी और चौüडाई = 7.5 सेमी

इसलिए लम्बाई, चौüडाई से 5 सेमी आधिक है।

आयत का परिमाप = 2 (लम्बाई + चौüडाई)

= 2 (12.5 + 7.5) सेमी

= 2 ह= 20 सेमी

= 40 सेमी

अत: उत्तर सही है।

उदाहरण 8 : 3 मेज और 5 कुसाê का मूल्य ` 1000 है, और 5 मेज और 2 कुसाê का मूल्य ` 970 है। एक मेज और एक कुसाê का अलगञ्अलग मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि एक मेज का मूल्य ` x और एक कुसाê का मूल्य ` y है। इसलिए 3 मेज और 5 कुसाê का मूल्य = ` $(3x + 5y)$

पहली शर्त के अनुसार ` $(3x + 5y)$ = ` 1000

$\therefore 3x + 5y = 1000$

और 5 मेज 2 कुसाê का मूल्य = ` $(5x + 2y)$

दूसरी शर्त के अनुसार ` $(5x + 2y)$ = ` 970

2090
9 $5x + 2y = 970$

,अत: $3x + 5y = 1000$ ..... (1)

$5x + 2y = 970$ ...... (2)

समीकरण (1) के दोनों पक्षों में 5 से तथा समीकरण (2) के दोनों पक्षों में 3 से गुणा करने पर,

$15x + 25y = 5000$ ...... (3)

$15x + 6y = 2910$ ...... (4)

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर,

$19y = 2090$

या, $y = \frac{4}{5}$

$y = 110$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$3x + 5 \times 110 = 1000$

या, $3x + 550 = 1000$

या, $3x = 1000 - 550$

या, $3x = 450$

या, $x =$

$x = 150$

अत: एक मेज का मूल्य = ` 150

तथा एक कुसाê का मूल्य = ` 110

सत्यापन : 3 मेज और 5 कुसाê का मूल्य = ` $(3 \times 150 + 5 \times 110)$

= ` (450 + 550)

= ` 1000

5 मेज और 2 कुसाê का मूल्य = ` $(5 \times 150 + 2 \times 110)$

= ` 970

अत: उत्तर सही है।

उदाहरण 9 : यादि किसी आयत की लम्बाई 3 मीटर बüढा देने तथा चौüडाई 4 मीटर कम कर देने से उसका क्षेत्रपŠल 72 वर्ग मीटर कम हो जाता है; तथा लम्बाई 1 मीटर कम कर देने और चौüडाई 4 मीटर बüढा देने से उसका क्षेत्रपŠल 88 वर्ग मीटर बüढ जाता है, तो आयत की

लम्बाई तथा चौüडाई ज्ञात कीजिए।

हल ञ्र् मान लीजिए कि आयत की लम्बाई = x मीटर

तथा चौüडाई = y मीटर

अत: आयत का क्षेत्रपŠल =xy वर्ग मीटर

प्रथम शर्त के अनुसार

$xy - (x + 3)(y - 4) = 72$

या, $xy - xy - 3y + 4x + 12 = 72$

या, $4x - 3y = 60$ .... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार

$(x - 1)\ (y + 4) - xy = 88$

या, $xy - y + 4x - 4 - xy = 88$

या, $4x - y = 92$ ..... (2)

समीकरण (1) में से समीरण (2) को घटाने पर

$-2y = -32$

या, $2y = 32$

या, $y = \frac{8}{9}$

$y = 16$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$4x - 3 \times 16 = 60$

या, $4x - 48 = 60$

या, $4x = 60 + 48$

या, $4x = 108$

या, $x = \frac{9}{7}$

$x = 27$

,अत: आयत की लम्बाई 27 मीटर तथा चौüडाई 16 मीटर है।

सत्यापन : उत्तर का स्वयं सत्यापन कीजिए

उदाहरण 10 : दो स्थान A और B एक दूसरे से 90 किमी दूर हैं| दो कारें एक साथ A और B से चलना प्रारम्भ करती हैं| यादि दोनों कारें एक ही दिशा में चलती हैं तो वे 9 घंटे बाद एक दूसरे से मिलती हैं और यादि विपरीत दिशाआें में चलती हैं तो वे 1285.png घंटे में मिलती हैं| उनकी चाल ज्ञात कीजिए।

हल ञ्र्

A N B M

मान लीजिए कि A से चलने वाली कार की चाल = x किमी/घंटा

और B से चलने वाली कार की चाल = y किमी / घंटा
पहली शर्त के अनुसार
दोनों कारें स्थान M पर मिलेगी :
अत:: $AM - BM = AB$
(9 घंटे में Aसे चली कार द्वारा तय की गयाè दूरी) ज्र् (9 घंटे में B से चली कार द्वारा तय की गयाè दूरी)
= 90 किमी
इसलिए $9x - 9y = 90$
या, $x - y = 10$ ..... (1)
दूसरी शर्त के अनुसार
दोनों कारें स्थान N पर मिलेंगी।
अत:$AN + BN = 90$
($\frac{9}{7}$ घंटे में A से चली कार द्वारा तय की गयाè दूरी + 1295.pngघंटे में B से चली कार द्वारा तय की गयाè दूरी।)
= 90
इसलिए $\frac{9}{7}x + \frac{9}{2}$ $y = 90$
या, $x + y = 70$ ... (2)
समीकरण (1) में समीकरण (2) जोüडने पर
$2x = 80$
या, $x = \therefore$
$x = 40$
x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर
$40 - y = 10$
या, $y = 40 - 10$

$y = 30$
अत: A से चलने वाली कार की चाल = 40 किमी/घंटा
तथा B से चलने वाली कार की चाल = 30 किमी/घंटा
(उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।)
उदाहरण 11 : सीता और गीता की आय का अनुपात 4 : 3 है तथा उनके व्यय में अनुपात 3 : 2 है। यादि
प्रत्येक ` 5000 मसिक बचत करता हो तो उनकी अलगज्र्अलग आय बताइए।
हल : मान लीजिए कि सीता की मसिक आय = ` x

तथा गीता की मसिक आय = ` y

पहली शर्त के अनुसार

$\frac{a}{2}\frac{b}{5}$ =

या, $3x = 4y$

या, $3x - 4y = 0$ ...... (1)

सीता द्वारा व्यय की गई धनरशि = ` $(x - 5000)$

तथा गीता द्वारा व्यय की गई धनरशि = ` $(y - 5000)$

दूसरी शर्त के अनुसार

=

या, $2(x - 5000) = 3(y - 5000)$

या, $2x - 10000 = 3y - 15000$

या, $2x - 3y = 10000 - 15000$

या, $2x - 3y = -5000$ ..... (2)

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने तथा समीकरण (2) को 3 से गुणा करने पर

$6x - 8y = 0$ ..... (3)

$6x - 9y = -15000$ ..... (4)

समीकरण (3) में से समीकरण (4) को घटाने पर

$y = 5000$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$3x - 4 \times 15000 = 0$

$3x = 60000$

$x = 20000$

अत: सीता की मसिक आय = ` 20000

तथा गीता की मसिक आय = ` 15000

(उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।)

उदाहरण 12 : 700 को ऐसे दो भागों में बाúटिए कि एक भाग का 40% दूसरे भाग के 60% से 80 आधिक हो।

हल -मान लीजिए कि पहला भाग = x

तथा दूसरा भाग = y

पहली शर्त के अनुसार

$x + y = 700$ ..... (1)

पहले भाग का 40% $= x \times \frac{9}{4}$

$= \left(3y + \frac{1}{4y}\right)$

दूसरे भाग का 60% $= y \times$

$= \frac{2x}{5}$

दूसरी शर्त के अनुसार

$\frac{3y}{5} - \frac{1000}{5} = 80$

या, $2x - 3y = 400$ .....(2)

समीकरण (1) को 2 से गुणा करने पर,

$2x + 2y = 1400$ .....(3)

समीकरण (3) में से समीकरण (2) को घटाने पर

$-5y = -1000$

$5y = 1000$ (चिन्ह बदलने पर)

या, $y = \therefore$

$\therefore y = 200$

y का मान समीकरण (1) में रखने पर

$x + 200 = 700$

या, $x = 700 - 200$

$\frac{8}{3}$ $x = 500$

अत: 700 के दो भाग 500 तथा 200 हैं|

(उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।)

उपर्यु‡ ‹त उदाहरणों से स्पष्ट है कि दõनिक जीवन से सम्बन्धित निम्नांकित प्रकार की समस्याआ ों को युगपतá समीकरणों की सहायता से हल किया जा सकता है ज्र्

(i) संख्या सम्बन्धी प्रश्न

(ii) भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

(iii) आयु सम्बन्धी प्रश्न

(iv) ज्यामिति सम्बन्धी प्रश्न

(v) अनुपात सम्बन्धी प्रश्न

(vi) प्रतिशत सम्बन्धी प्रश्न

यहाú पर प्रत्येक प्रकार का एक उदाहरण देकर अभ्यासार्थ प्रश्न दिये गये हैं| उन्हें ध्यान से पिüढये तथा दिये गये प्रश्नों को हल कीजिए।

अंक सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 13 : दो अंकों की एक संख्या की दहाई का अंक इकाई के अंक से 3 कम है। यादि संख्या अंकों के जोüड की चार गुनी हो, तो वह संख्या बताइए।

हल : मान लीजिए कि संख्या के दहाई का अंक = x

तथा इकाई का अंक = y

अत: संख्या का मान = 10x + y

पहली शर्त के अनुसार,

$x = y - 3$

या $x - y = -3$ .... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$10x + y = 4(x + y)$

या, $10x + y = 4x + 4y$

या, $10x - 4x + y - 4y = 0$

या, $6x - 3y = 0$ ..... (2)

समीकरण (1) को 6 गुणा करने पर,

$6x - 6y = -18$ ...... (3)

समीकरण (2) से समीकरण (3) को घटाने पर,

$3y = 18$

या, y = ∴∴

$\frac{1}{5}$ $y = 6$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिपस्थित करने पर,

$x - 6 = -3$

या, $x = 6 - 3$

$\frac{1}{3}$ $x = 3$

,अत: संख्या = 36

उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।

अभ्यास 8(b)

1. दो संख्याआ ें का योग 24 है। उनमें से एक संख्या दूसरी की दो गुनी है। संख्याएँ बताइए।

2. दो संख्याआ ें का योग, छोटी संख्या के तीन गुने से 3 आधिक है। यादि दोनों का अन्तर 5 है तो संख्याएँ बताइए।

3. दो अंकों की एक संख्या का इकाई का अंक दहाई के अंक से 1 आधिक है। यादि संख्या अंकों के जोüड के 5 गुने से 3 आधिक हो तो वह संख्या बताइए।

4. दो अंकों से बनी एक संख्या का दहाई का अंक, इकाई के अंक से 5 कम है। यादि अंकों के स्थान बदल दिये जायú तो नयाè संख्या पहली संख्या के दो गुने से 7 आधिक हो जायेगी। वह संख्या बताइए।

5. दो अंकों की एक संख्या के दहाई का अंक, इकाई के अंक का दूना है। यादि अंकों के स्थान बदल दिये जायú तो नयाè संख्या पहले से 36 कम हो जायेगी, तो संख्या बताइए।

6. दो अंकों वाली संख्या का 7 गुना अंकों के स्थान बदल लेने से बनने वाली संख्या के 4 गुने के बराबर है। यादि इकाई एवं दहाई के अंकों का अन्तर 3 हो तो संख्या बताइए।

7. दो अंकों की एक संख्या अपने अंकों के अन्तर की 21 गुनी है। यादि संख्या से 36 घटा दें तो, संख्या के अंकों के स्थान बदल जाते हैं| तो वह संख्या बताइए।

भिन्न सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 1: यादि किसी भिन्न के अंश और हर में से ‰ाŠमश: 1 घटा दें, तो नयाè भिन्न का मान $\frac{x}{y}$ हो जाता है। यादि उसके अंश और हर में ‰ाŠमश: 1 जोüड दें तो नयाè भिन्न का मान $\frac{x-1}{y-1} = \frac{1}{5}$ होता है। वह भिन्न बताइए।

हल ञ्‌ मान लीजिए कि भिन्न $\frac{x+1}{y+1} = \frac{1}{3}$ है।

पहली शर्त के अनुसार

$\frac{6}{2}$

या, $5(x - 1) = y - 1$

या, $5x - 5 = y - 1$

या, $5x - y = 5 - 1$

या, $5x - y = 4$ ...(1)

दूसरी शर्त के अनुसार

$\frac{3}{1}$

या, $3(x + 1) = y + 1$

या, $3x + 3 = y + 1$

या, $3x - y = 1 - 3$

या, $3x - y = -2$ ..... (2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$2x = 6$

या, $x = \frac{2}{3}$

$x = 3$

x का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर

$5 \times 3 - y = 4$

या, $15 - y = 4$

या, $-y = 4 - 15$

$-y = -11$ (चिन्ह बदलने पर)

$y = 11$

अत: भिन्न $\frac{1}{3}$ है।

उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।

अभ्यास 8(c)

1. यादि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 1 जोüड दिया जाये तो वह 1453.png के बराबर हो जाती है और यादि अंश और हर दोनों में से 2 घटा दिया जाये तो वह 1458.png के बराबर हो जाती है। वह भिन्न बताइए।

2. यादि किसी भिन्न के हर में 1 जोüड दिया जाये तो वह 1463.png के बराबर हो जाती है और यादि अंश में 1 जोüड दिया जाये तो भिन्न 1 के बराबर हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

3. एक भिन्न का मान 1469.png हो जाता है, यादि उसके अंश में 1 जोüड दें। उसका मान 1474.png हो जाता है यादि उसका हर पहले हर के दूने से 1 आधिक कर दिया जाय। वह भिन्न बताइए।

4. वह भिन्न बताइए जिसके अंश से यादि 1 घटा दिया जाय तो उसका मान 1479.png और यादि उसके हर में 4 जोüड दिया जाय, तो उसका मान 1484.png हो जाता है।

आयु सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 15 : 5 वर्ष पहले पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की 3 गुनी थी। 10 वर्ष बाद पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की दो गुनी हो जायेगी। पिता और पुत्र की वर्तमान आयु बताइए।

हल : मान लीजिए कि पिता की वर्तमान आयु = x वर्ष

और पुत्र की वर्तमान आयु = y वर्ष

5 वर्ष पूर्व पिता की आयु = (x - 5) वर्ष

5 वर्ष पूर्व पुत्र की आयु = (y -5) वर्ष

10 वर्ष पश्चातá पिता की आयु = (x + 10) वर्ष

10 वर्ष पश्चातá पुत्र की आयु = (y + 10) वर्ष

पहली शर्त के अनुसार,

$x – 5 = 3 (y – 5)$

या, $x – 5 = 3y – 15$

या, $x – 3y = 5 –15$

या, $x – 3y = –10$ .... (1)

दूसरी शर्त के अनुसार,

$x + 10 = 2(y + 10)$

या, $x + 10 = 2y + 20$

या, $x – 2y = 20 – 10$

या, $x – 2y = 10$ .... (2)

समीकरण (1) में से समीकरण (2) को घटाने पर,

$–y = –20$

या, $y = 20$

y का मान समीकरण (1) में प्रतिस्थपित करने पर,

$x - 3 \times 20 = -10$

या, $x - 60 = -10$

या, $x = 60 - 10$

$x = 50$

अत: पिता की वर्तमान आयु = 50 वर्ष

पुत्र की वर्तमान आयु = 20 वर्ष

उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।

अभ्यास 8 (d)

1. एक पिता की 10 वर्ष पहले आयु अपने पुत्र की आयु की 3 गुनी थी। 10 वर्ष बाद पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की 2 गुनी हो जायेगी। पिता और पुत्र की वर्तमान आयु बताइए।

2. एक आदमी की आयु इस समय उसके पुत्र की आयु की चार गुनी है। अब से 18 वर्ष बाद उसकी आयु पुत्र की आयु से दूनी होगी। दोनों की वर्तमान आयु बताइए।

3. राधे के पिता की आयु इस समय उसकी आयु की 7 गुनी है। एक वर्ष पहले पिता की आयु, राधे की आयु से 9 गुनी थी। इस समय दोनों की आयु बताइए।

4. मीरा की आयु इस समय रीता की आयु की 1489.png है। 4 वर्ष पहले मीरा की आयु, रीता के आयु की 1494.png थी। इस समय दोनों की आयु ‡‹या है ?

5. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु की 3 गुनी है। 12 वर्ष बाद, पिता अपने पुत्र की आयु का 2 गुना हो जायेगा। दोनों की वर्तमान आयु बताइए।

ज्यामिति सम्बन्धी प्रश्न

उदाहरण 16 : समान्तर चतुर्भुज ABCD के 1499.pngAतथा 1504.pngB में अनुपात 1 : 2 है। चतुर्भुज के कोण ज्ञात कीजिए।

हल ज्र् मान लीजिए कि

$\frac{-2}{1}$ $A = x^0$, अंश1514.pngB = y0 (आगे हल में x0 के स्थान पर x

दी हुई शर्त के अनुसार, y0 के स्थान पर y लिखा जायेगा)

$\angle$

या, $2x = y$

$2x - y = 0$ .... (1)

चूúकि ABCD एक समान्तर चतुर्भुज है, इसलिए

$\therefore A + \therefore B = 180^0$ (समान्तर चतुर्भ्रुज के संलग्न कोणों या, $x^0 + y^0 = 180^0$का योग 180^0 होता है।)

$x + y = 180$ ..... (2)

समीकरण (1) और समीकरण (2) को जोüडने पर,

$3x = 180$

$\angle x = 60$

$\angle y = 2x = 2 \times 60 = 120$

$\therefore A = 60^0$, ■ $B = 120^0$,

चूúकि समान्तर चतुर्भुज के सम्मुख कोण समान होते हैं,

$\angle \angle C = \angle A = 60^0$

तथा $\frac{3}{5} D = \angle B = 120^0$,

(उत्तर का सत्यापन शिक्षाथाê स्वयं करें।)

अभ्यास 8(e)

1. एक त्रिभुज के दो कोणों में अनुपात 5 : 4 है। यादि उनमें से एक कोण दूसरे कोण से 100 आधिक हो, तो उसके कोण ज्ञात कीजिए।

2. दो कोटिपूरक कोण इस प्रकार हैं कि छोटा कोण दूसरे कोण के 1581.png गुने से 100 आधिक है। कोणों को

ज्ञात कीजिए।

3. Δ ABC के सभी कोणों को ज्ञात कीजिए यादि – $\angle A = x^0$, $\frac{1}{2} B = 3x^0$, $\frac{4}{5} C = y^0$,ाौर 3y ज्र् 5x = 30।

दक्षता अभ्यासज्र् 8

निम्नांकित समीकरणज्रनिकाय हल कीजिए और उत्तर की जाúच कीजिए

1. 3x + 2y = 8 2. 4x + 6y = 9

5x ज्र् 2y = 16 4x ज्र् 2y = ज्र्11

3. x + y = 7 4. 7x ज्र् 2y = 1

3x ज्र् 2y = 11 3x + 4y = 15

5. दो अंकों वाली किसी संख्या और उस संख्या के अंकों के ‰ाŠम को उलट देने पर प्राप्त हुई संख्या का योगपŠल 121 है तथा अंकों में 3 का अन्तर है। संख्या ज्ञात कीजिए।

6. दो अंकों वाली किसी संख्या के अंकों का योगपŠल 9 है। दी हुई संख्या के अंकों के ‰ाŠम को उलट देने पर प्राप्त हुई संख्या मूल संख्या से 27 आधिक है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

7। यादि एक भिन्न के अंश में 1 जोüड दिया जाए और हर में से 1 घटा दिया जाए तो भिन्न का मान 1 होता है। यादि केवल हर में 1 जोüड दिया जाए तो भिन्न का मान 1601.png हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

8. एक भिन्न ऐसी है कि यादि उसके अंश और हर दोनों में 1 जोüड दिया जाए तो भिन्न का मान 1606.png हो जाता है। यादि अंश और हर दोनों में से 5 घटा दिया जाए तो भिन्न का मान 1611.png हो जाता है।

भिन्न ज्ञात कीजिए।

9. पाúच वर्ष पहले मेरी आयु अपने पुत्र की आयु की तीन गुनी थी और 10 वर्ष बाद मेरी आयु अपने पुत्र की आयु की दो गुनी हो जाएगी। बताइए कि आज मेरी आयु कितनी है।

10 एक ऐसी भिन्न है जिसके अंश से 2 घटाने और हर में 3 जोüडने पर वह 1616.png हो जाती है और अंश में 6 जोüडने तथा हर को 3 से गुणा करने पर वह 1622.png हो जाती है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

11. यादि पिता की आयु (वषाô में) में उसके पुत्र की आयु का दो गुना जोüडा जाए तो योगपŠल 70 होता है और यादि पुत्र की आयु में पिता की आयु का दो गुना जोüडा जाए तो योगपŠल 95 होता है। पिता और पुत्र की आयु ज्ञात कीजिए।

12. च‰ीय चतुर्भुज ABCD में 1627lpngA = (2x + 4)0, 1632.pngB = (y + 3)0, 1637lpngC = (2y + 10)0 और D = (4x ज्र् 5)0, तो चतुर्भुज के चारों कोण ज्ञात कीजिए।

13. 3 कुसाê और 2 मेज का मूल्य ` 700 है और 5 कुसाê तथा 3 मेजों का मूल्य ` 1100 है। एक कुसाê और एक मेज का मूल्य अलगज्र्अलग ज्ञात कीजिए।

14. इस समय A की आयु B की आयु से दो गुनी है। 8 वर्ष बाद उनकी आयु 7 : 4 के अनुपात में हो जाएगी। इस समय प्रत्येक की आयु, कितनी है ?

15. एक व्यि‡‹त ने कुल ` 35000 की पूúजी का एक भाग 12% वर्षिक ब्याज की दर पर और शेष 14% वर्षिक ब्याज की दर पर उधार दिये। यादि उसे कुल वर्षिक ब्याज ` 4460 मिला हो, तो उसने अलगज्र्अलग कितना धन उधार दिये थे ?

हमने ‡‹या चर्चा की

1. दो अज्ञात चर वाले समीकरणों a1x + b1y + c1 = 0 और a2x + b2y + c2 = 0(जहाú) को युगपतá समीकरण कहते हैं|
2. युगपतá समीकरणों का हल सारणी विधि से ज्ञात किया जा सकता है।
3. सारणी विधि द्वारा युगपतá समीकरणों का सुविधाजनक हल न होने के कारण अन्य दो विधियों

(1) प्रतिस्थापन विधि और (2) विलोपन विधि द्वारा इनके हल ज्ञात करना बताया गया है।

4. दो अज्ञात रशियों वाले वर्तिक प्रश्नों को युगपतá समीकरण में रूपान्तरित कर उनके हल की विधा से अवगत कराया गया तथा दिये गये प्रतिबन्धों के आधार पर हल की शुद्धता की जाúच करना बताया गया है।

उत्तर माला

अभ्यास 8 (*a*)

1. (i) $x = 4 + y$ **(ii)** $x = 3 - 2y$ **(iii)** $x = 6 - 3y$ **2. (i)** $y = 5x - 9$ **(ii)** $y = 3x - 5$ **(iii)** $y = 8 - 4x$ **3. (i)** $x = 5, y = -1$ **(ii)** $x = 1, y = 5$ **4. (i)** $x = 7, y = 3$ **(ii)** $x = - 12, y = -6$**(iii)** $x = -2, y = 3$, **(iv)** $x = 3, y = - 2$ **5. (i)** $x = 7.5, y = 4.5$ **(ii)** $x = 2, y = -1$ **(iii)** $x = \quad , y =$ **(iv)** $x = 4, y = 6$ **6.(i)** $x = 2, y = 1$ **(ii)** $x = 1, y = 1$ **(iii)** $x = 0, y = 1$**(iv)**$x = 2, y = 2$ **7. (i)** $x = 2, y = - 3$ **(ii)** $x = - \quad , y =$

-3 **(iii)** $x = 1, y = 1$ **8. (i)** $x = \frac{2}{15}+\left(\frac{9}{-10}\right)$, $y = \frac{2}{15}+\left(\frac{-9}{10}\right)$ **(ii)** $x = 14, y =$ 15 **(iii)** $x = \frac{4}{30}+\frac{-27}{30}$, $y = \frac{4+(-27)}{30}$

अभ्यास 8 (*b*)

1. 8, 16 **2.** 7, 2 **3.** 78 **4.** 38 **5.** 84 **6.** 36 **7.** 84

अभ्यास 8 (*c*)

1. $\frac{4-27}{30}$ **2.** $\frac{-23}{30}$, **3.** $\frac{a}{b}$ **4.** $\frac{c}{d}$

अभ्यास 8 (*d*)

1. 70 वर्ष, 30 वर्ष 2. 36 वर्ष, 9 वर्ष , 3. 28 वर्ष, 4 वर्ष 4. 16 वर्ष मीरा की आयु, 20 वर्ष रीता की आयु

5. 36 वर्ष, 12 वर्ष

अभ्यास 8 (*e*)

1. 50^0, 40^0 **2.** 40^0, 50^0 , **3.** $\frac{p}{q} A = 30^0$, $\frac{r}{q} B = 90^0$, $\times C = 60^0$

दक्षता अभ्यास 8

1. $x = 3, y =$ X **2.** $x = \sqrt{25}$, $y =$ **3.** $x = 5, y = 2$ **4.** $x = 1, y =$ 3 **5.** 74 या 47 **6.** 36 **7.** **8.** $\frac{5}{-6} = \frac{5\times(-1)}{-6\times(-1)} = \frac{-5}{6}$ **9.** 50 वर्ष, 20 वर्ष 10 1753.png 11. 40 वर्ष, 15 वर्ष 12. 700, 530, 1100, 1270

13. ` 100 एक कुसाê का मूल्य, ` 200 एक मेज का मूल्य 14. 48 वर्ष, 24 वर्ष 15. 12% वर्षिक व्याज की दर पर ` 22000 तथा 14% वर्षिक व्याज की दर पर ` 13000 लगाए गये।

इकाई : 8 वर्ग समीकरण

- वर्ग समीकरण
- $x^2 = k$ (जहाँ k एक पूर्ण संख्या है) के रूप वाले समीकरणों का हल
- $ax^2 + bx + c = 0$ के प्रकार के समीकरणों का हल
- समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ पर आधारित वार्तिक प्रश्न

8.1 भूमिका

आपने पिछली कक्षाओं में $ax + b = cx + d$, $\frac{ax+b}{cx+d} = k$, $cx + d \neq 0$ प्रकार के समीकरणों का अध्ययन किया है। आप जानते हैं कि इस प्रकार के सभी समीकरणों में चर की अधिकतम घात एक है। यह सभी एक चर में रेखीय समीकरण है।

इस इकाई में हम उन समीकरणों का अध्ययन करेंगे जिनमें, चर की अधिकतम घात दो है। इन समीकरणों को वर्ग समीकरण या द्विघात समीकरण कहते हैं। देखिए, **$x^2 = k$, $ax^2 + bx + c = 0$ में चर x की अधिकतम घात दो है, इस प्रकार के सभी समीकरण वर्ग समीकरण हैं।**

प्राचीन भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट प्रथम की पुस्तक आर्यभट्टीय के द्वितीय भाग में वर्गीय समीकरण की विस्तृत चर्चा की गई है। प्राचीन काल में ही गणितज्ञ श्रीधराचार्य ने वर्गसमीकरण को हल करने का सूत्र स्थापित किया था, जिसे श्रीधराचार्य सूत्र कहा जाता है। इसका प्रयोग आज भी किया जाता है। वर्ग समीकरणों का हल अरब के गणितज्ञ अलख्वारिज्मी और उमर खय्याम ने भी अपनी-अपनी विधियों से किया।

8.2 वर्ग समीकरण

निम्नांकित समीकरणों का अवलोकन कीजिए :

(i) $x^2 = 9$

(ii) $9x^2 = 16$

(iii) $x^2 + 5x + 6 = 0$

(iv) $3x^2 + 10x + 8 = 0$

(v) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

इन्हें वर्ग समीकरण कहते हैं क्योंकि इनमें चर x की अधिकतम घात 2 है।

उपर्युक्त समीकरणों को देखने से स्पष्ट है कि वर्ग समीकरण (i) और (ii) में x का एकघातीय पद नहीं है। केवल x का दो घात वाला पद और एक संख्यात्मक पद है। वर्ग समीकरण (iii), (iv) तथा (v) में बाएँ पक्ष त्रिपदीय व्यंजक के रूप में हैं।

अब वर्गसमीकरण (i) तथा (ii) पर विचार कीजिए

(i) $x^2 = 9$ में 9 एक निश्चित संख्या है।

(ii) $9x^2 = 16$

दोनों पक्षों में 9 का भाग देने पर –

$$x^2 = \frac{16}{9}$$

$\frac{16}{9}$ एक निश्चित संख्या है।

अतः वर्ग समीकरण (i) तथा (ii) को $x^2 = k$ के रूप में लिख सकते हैं, जहाँ पर वर्ग समीकरण (i) में $k = 9$ और वर्ग समीकरण (ii) में $k = \frac{16}{9}$ है।

$x^2 = k$ वर्ग समीकरण का एक मानक रूप है।

अब वर्ग समीकरण (iii), (iv) और (v) पर विचार कीजिए। इन तीनों वर्ग समीकरणों का रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है; जहाँ पर वर्ग समीकरण (iii) में $a = 1$, $b = 5$, $c = 6$, वर्ग समीकरण (iv) में $a = 3$, $b = 10$, $c = 8$ और वर्ग समीकरण (v) में $a = 2$, $b = 5$, $c = -7$ है।

समीकरण $3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$ को भी $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में निम्नांकित विधि से लिखा जा सकता है –

$3x^2 - 4x + 1 = 2x^2 - 2x + 4$

या, $3x^2 - 4x + 1 - 2x^2 + 2x - 4 = 0$

या, $x^2 - 2x - 3 = 0$

या, $1 \times x^2 + (-2)x + (-3) = 0$

या, $ax^2 + bx + c = 0$ जहाँ $a = 1$, $b = -2$ तथा $c = -3$

$ax^2 + bx + c = 0$ भी वर्ग समीकरण का एक मानक रूप है।

अतः वर्ग समीकरण के निम्नांकित दो मानक रूप है –

(i) $x^2 = k$, जहाँ पर k एक धनात्मक संख्या है।

तथा (ii) $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ पर x एक चर संख्या है तथा a, b और c अचर संख्याएँ है।

8.2.1 समीकरण $x^2 = k$ के रूप वाले समीकरणों का हल

$x^2 = k$ में x अज्ञात चर है तथा k एक धनात्मक स्थिरांक है। यह आवश्यक नहीं है कि समीकरण

में अज्ञात पद दर्शाने के लिए सदैव x का प्रयोग किया जाए। वस्तुतः कोई भी वर्णमाला का अक्षर, जैसे – y, z, n, p आदि का भी प्रयोग कर सकते हैं।

$x^2 = k$ प्रकार के समीकरणों को हल करने के लिए निम्नांकित समीकरणों पर विचार कीजिए –

(i) $x^2 = 16$ (ii) $x^2 = 18$

(iii) $x^2 - 25 = 0$ (iv) $x^2 - 24 = 0$

(v) $4x^2 = 9$ (vi) $16x^2 - 25 = 0$

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

हल :

(i) $x^2 = 16$

किस संख्या का वर्ग करने पर 16 प्राप्त होता है ?

हम देखते हैं कि $4^2 = 16$ तथा $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$

अतः $x^2 = 16 \ (\pm 4)^2$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

संक्षेप में,

$$x^2 = 16$$

$$\therefore \quad x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

अतः $x = 4$ तथा -4

(ii) $x^2 = 18$

या, $x = \pm\sqrt{18} = \pm\sqrt{9 \times 2} = \pm(\sqrt{9} + \sqrt{2}) = \pm 3\sqrt{2}$

अतः $x = 3\sqrt{2}$ और $x = -3\sqrt{2}$

सत्यापन : **बायाँ पक्ष**= $x^2 = (3\sqrt{2})^2 = 3 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 18$ **दायाँ पक्ष**

और बायाँ पक्ष= $x^2 = (-3\sqrt{2})^2 = 3 \times 3 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 18$ **दायाँ पक्ष**

अतः उत्तर सही है।

(iii) $x^2 - 25 = 0$

या, $x^2 = 25$ (पक्षान्तर करने पर)

$x = \pm\sqrt{25} = \pm 5$ अतः $x = 5$ तथा $x = -5$

सत्यापन $5^2 - 25 = 0$ तथा $(-5)^2 - 25 = 25 - 25 = 0$

अतः उत्तर सही है।

(iv) $x^2 - 24 = 0$

या, $x^2 = 24$ (पक्षान्तर करने पर)

$x^2 = \pm\sqrt{24}$

$= \pm\sqrt{4 \times 6} = \pm\sqrt{4} \times \sqrt{6}$

अतः $x = \pm 2\sqrt{6}$

अतः $x = 2\sqrt{6}$ तथा $x = -2\sqrt{6}$

सत्यापन : $(2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{6})(2\sqrt{6}) = 2 \times 2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 4 \times 6 = 24$ तथा

$(-2\sqrt{6})^2 = (-2\sqrt{6})(-2\sqrt{6}) = -2 \times -2 \times \sqrt{6} \times \sqrt{6} = 4 \times 6 = 24$

अतः उत्तर सही है।

(v) $4x^2 = 9$

या, $x^2 = \frac{9}{4}$ (दोनों पक्षों में 4 का भाग देने पर)

$x^2 = \pm\sqrt{\frac{9}{4}}$

$= \pm\frac{3}{2}$

अतः $x = \frac{3}{2}$ तथा $x = -\frac{3}{2}$

सत्यापन : $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ और $\left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

अतः उत्तर सही है।

(vi) $16x^2 - 25 = 0$

या, $16x^2 = 25$

या $x^2 = \frac{25}{16}$

$x = \pm\sqrt{\frac{25}{16}}$

$= \pm\frac{5}{4}$

अतः $x = \frac{5}{4}$ तथा $x = -\frac{5}{4}$

सत्यापन : बाया पक्ष $= 16x^2 - 25$

$= 16 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 25$

$= 16 \times \frac{25}{16} - 25$

$= 25 - 25$

$= 0$

= दायाँ पक्ष

और बायें पक्ष में $x = -\frac{5}{4}$ रखने पर

बायाँ पक्ष $= 16 \times \left(-\frac{5}{4}\right)^2 - 25$

$= 16 \times \frac{25}{16} - 25$

$= 25 - 25$

$= 0$

= दायाँ पक्ष

अतः उत्तर सही है।

(vii) $\frac{x}{2} - \frac{2}{x} = 0$

या, $\frac{x}{2} = \frac{2}{x}$ (पक्षान्तर करने पर)

या $x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$= \pm 2$

अतः $x = 2$ तथा $x = -2$

सत्यापन : बाया पक्ष $= \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$ में $x = 2$ प्रतिस्थापित करने पर,

$= \frac{2}{2} - \frac{2}{2}$

$= 1 - 1$

$= 0$

= दायाँ पक्ष

और बायें पक्ष में $x = -2$ प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= \frac{-2}{2} - \left(\frac{2}{-2}\right)$

$= -1 - (-1)$

$= -1 + 1$

$= 0$

= दायाँ पक्ष

अतः उत्तर सही है।

उपर्युक्त वर्ग समीकरणों के हल से स्पष्ट है कि प्रत्येक वर्ग समीकरण में अज्ञात संख्या x के दो मान हैं, जिनका निरपेक्ष मान समान है, परन्तु एक धनात्मक है, तथा दूसरा ऋणात्मक x **के इन मानों को समीकरण के मूल (Roots) कहते हैं।**

अतः $x^2 = k$ रूप वाले वर्ग समीकरणों को हल करने के लिए k का वर्गमूल ज्ञात करते हैं। हम जानते हैं कि किसी संख्या के दो वर्गमूल होते हैं, जिनके निरपेक्ष मान समान होते हैं।

अतः

> $x^2 = k$
> **या,** $x = \pm\sqrt{k}$
> **अर्थात्** $x = \sqrt{k}$, $x = -\sqrt{k}$

हमने देखा $x^2 = k$ के प्रकार के वर्ग समीकरणों को हल के लिए दोनों पक्षों का वर्गमूल लेते है।

जैसे $x^2 = 64$ लेकर

दोनों पक्षों का वर्ग मूल लेने पर

$$x = \pm 8$$

ध्यान दें, जिस प्रकार 64 का वर्गमूल ±8 होता है, उसी प्रकार, x^2 का वर्गमूल $\pm x$ होगा।

अतः $\pm x = \pm 8$ लिखा जाना चाहिए।

ऐसा लिखने पर निम्नलिखित मान प्राप्त होता है।

(i) $+x = +8$

(ii) $+x = -8$

(iii) $-x = +8$

(iv) $-x = -8$

परन्तु उपर्युक्त में (i) और (iv) से $+x = +8$ तथा $-x = -8$

चूंकि ये दोनों x का एक ही मान व्यक्त करते हैं। इसलिए इनमें से एक मान $x = +8$ लिया जाता है। इसी प्रकार (ii) और (iii) की सहायता से $+x = -8$ और $-x = +8$ चूंकि यह दोनों भी एक ही मान व्यक्त करते हैं। इसलिए $x = -8$ लिया जाता है।

अतः स्पष्ट है कि $x = \pm 8$ में उपर्युक्त सभी चारों मान अन्तर्निहित हैं। यही कारण है कि वर्गमूल लेते समय केवल एक ही पक्ष के दोनों मान धन और ऋण लिखे जाते हैं। व्यवहार में संख्यात्मक मान का वर्गमूल धन और ऋण के चिन्हों के साथ लिखा जाता है, परन्तु अज्ञात राशि का केवल धनात्मक मान ही लिया जाता है।

8.2.2 $x^2 = k$ के प्रकार के समीकरणों को हल करने की दूसरी विधि :

हल : $x^2 = k$

या $x^2 - k = 0$ (k को पक्षान्तर करने पर)

या $x^2 - (\sqrt{k})^2 = 0$ ($(a^2 - b^2)$ के रूप में लिखने पर

या $(x - \sqrt{k})(x + \sqrt{k}) = 0$ (सर्वसमिका $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ के अनुसार)

देखिए यहाँ दो व्यंजकों का गुणनफल शून्य है। अतः इनमें से $(x - \sqrt{k})$ शून्य होगा या $(x + \sqrt{k})$ शून्य होगा।

जब $x - \sqrt{k} = 0$

तब $x = \sqrt{k}$

जब $x + \sqrt{k} = 0$

तब $x = -\sqrt{k}$

उदाहरण : $x^2 = 121$ को हल कीजिए

हल : $x^2 = 121$

या $x^2 - 121 = 0$ (121 को पक्षान्तर करने पर)

या $x^2 - 11^2 = 0$ ($x^2 - 11^2$ के रूप में लिखने पर)

या $(x - 11)(x + 11) = 0$ ($x^2 - 11^2 = (x - 11)(x + 11)$)

जब $x - 11 = 0$, तब $x = 11$

जब $x + 11 = 0$, तब $x = -11$

अतः $x = 11, x = -11$

अभ्यास 8 (a)

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच कीजिए :

1. $x^2 - 49 = 0$
2. $16x^2 - 9 = 0$
3. $ax^2 - b = 0$
   (जहाँ a और b धन पूर्णांक हैं।)
4. $\frac{4}{9}x^2 = 1$
5. $64p^2 = 25$
6. $5y^2 = 20$
7. $7x^2 = 8$
8. $5x^2 = x^2 + 1$
9. $x = \frac{4}{x}$
10. $\frac{x}{5} - \frac{5}{x} = 0$

11. $-ax^2 + c = 0$

12. $2x^2 - 18 = 0$

13. $\frac{x^2}{4} = 9$

14. $\frac{x}{a} - \frac{a}{x} = 0$

15. $x^2 - 256 = 0$

16. $0.04x^2 - 0.25 = 0$

8.3 समीकरण $x^2 = k$ पर आधारित साधारण वार्तिक प्रश्न

दैनिक जीवन की अनेक समस्याएँ हम समीकरण का उपयोग करके हल कर सकते हैं। ऐसा करने के लिए हमको निम्नांकित चार चरणों का पालन करना होगा।

1. **अज्ञात राशि को वर्णमाला के किसी अक्षर जैसे x, y, z, n, p आदि से व्यक्त कीजिए।**
2. **भाषा में दिये हुए कथन को समीकरण में बदलिये।**
3. **समीकरण को हल कीजिए।**
4. **मूल समस्या में प्राप्त मान प्रतिस्थापित करके उत्तर की जाँच कीजिए।**

उदाहरण 1 : एक वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है। उस की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि वर्ग की भुजा x सेमी है।

A, B, C, D; x सेमी० (चारों भुजाएँ)

वर्ग का क्षेत्रफल = (वर्ग की भुजा)^2

= x^2 वर्ग सेमी

परन्तु वर्ग का क्षेत्रफल 64 वर्ग सेमी है।

$\therefore \quad x^2 = 64$

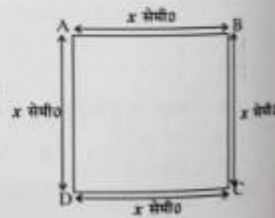
$\therefore \quad x = \pm\sqrt{64}$

$= \pm 8$

$\therefore \quad x = 8$ तथा -8

परन्तु वर्ग की भुजा ऋणात्मक नहीं हो सकती है,

अतः $x = -8$ अमान्य है।

$x = 8$

अतः वर्ग की भुजा = 8 सेमी

उत्तर की जाँच – वर्ग का क्षेत्रफल = 8 × 8 वर्ग सेमी = 64 वर्ग सेमी

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 2 : एक आयताकार बाग की लम्बाई, उसकी चौड़ाई की तीन गुनी है। यदि बाग का क्षेत्रफल 243 वर्ग मीटर हो तो बाग की लम्बाई कितनी है ?

हल : मान लीजिए कि बाग की चौड़ाई x मी. है।

बाग की लम्बाई, उसकी चौड़ाई की तीन गुनी है।

बाग की लम्बाई = 3 × चौड़ाई

= 3 × x मी

= $3x$ मी

बाग का क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= $3x \times x$ वर्ग मी

= $3x^2$ वर्ग मी

परन्तु बाग का क्षेत्रफल 243 वर्ग मी है।

$3x^2 = 243$

या, $x^2 = \frac{243}{3}$

$= 81$

$x = \pm\sqrt{81}$

$= \pm 9$

परन्तु बाग की चौड़ाई ऋणात्मक नहीं होती है।

बाग की चौड़ाई = 9 मी

बाग की लम्बाई = $3x$ मी

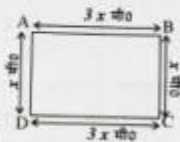
= 3 × 9 मी

= 27 मी.

उत्तर की जाँच: क्षेत्रफल = लम्बाई × चौड़ाई

= 27 × 9 वर्ग मी

= 243 वर्ग मी

अतः उत्तर सही है।

अभ्यास 8(b)

1. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 441 वर्ग मीटर है। मैदान का परिमाप ज्ञात कीजिए।
2. एक आयताकार बाग की लम्बाई और चौड़ाई में अनुपात 3 : 2 है। यदि बाग का क्षेत्रफल 600 वर्ग मी है, तो उसकी लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।
3. एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 225 वर्गमीटर है। उसका परिमाप ज्ञात कीजिए।
4. कक्षा 8 के 144 शिक्षार्थियों को पंक्तियों में इस प्रकार खड़ा करना है कि प्रत्येक पंक्ति में उतने ही शिक्षार्थी हों जितनी कि कुल पंक्तियाँ हैं। पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
5. किसी संख्या के वर्ग का तीन गुना 192 है। संख्या ज्ञात कीजिए।

8.4 वर्ग समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का हल (गुणनखंड विधि से)

हम जानते हैं कि यदि $x \times y = 0$, तो

$x = 0$

या, $y = 0$

इसी प्रकार यदि $x(x-4) = 0$ है, तो

$x = 0$

अथवा, $x - 4 = 0$

या, $x = 4$

और यदि $(x-5)(x-7) = 0$ हो, तो

$x - 5 = 0$ या, $x = 5$

अथवा, $x - 7 = 0$ या, $x = 7$

अतः यदि दो (या दो से अधिक) व्यंजकों का गुणनफल शून्य हो, तो उनमें से कम से कम एक व्यंजक का मान शून्य अवश्य होगा।

अब समीकरण $(x-5)(x-7) = 0$ के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा कीजिए –

$x^2 - 7x - 5x + (-5)(-7) = 0$

या, $x^2 - (7+5)x + 35 = 0$

या, $x^2 - 12x + 35 = 0$

हम देखते हैं कि यह एक वर्ग समीकरण है जिसका रूप $ax^2 + bx + c = 0$ का है, जहाँ $a = 1$, $b = -12$ और $c = 35$ है

इसी प्रकार

$(x-8)(x+6) = 0$ के बायें पक्ष के व्यंजकों का गुणा करने पर

$x^2 + 6x - 8x + (-8)(6) = 0$

$x^2 - 2x - 48 = 0$

... $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप का है, जहाँ पर $a = 1$, $b = -2$ तथा $c = -48$

... $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप के वर्ग समीकरणों के हल, उनके बायें पक्ष के व्यंजक के गुणनखंड ... जाते हैं।

... वर्ग समीकरणों को देखिए –

$(x+1)(x-2) = 0$

या $x^2 + (1-2)x + 1 \times (-2) = 0$

या $x^2 + (-1)x + (-2) = 0$

या $x^2 - x - 2 = 0$

$(x-p)(x-q) = 0$

या $x^2 - (p+q)x + pq = 0$

... हम देखते हैं कि रैखिक समीकरणों $x - p = 0$, $x - q = 0$ को गुणा करके वर्ग समीकरण ... $q)x + pq = 0$ प्राप्त कर सकते हैं जिसका हल $x = p$ तथा $x = q$ है। विलोमतः वर्ग समीकरण ... $+ c = 0$ का हल उसके गुणनखंड करके ज्ञात कर सकते हैं।

...1 : हल कीजिए :

समीकरण $x^2 + 7x + 10 = 0$

$x^2 + 7x + 10 = 0$ — यहाँ $a = 1, b = 7, c = 10$

या, $x^2 + (2+5)x + 10 = 0$ — $a \times c = 1 \times 10 = 10$

या, $x^2 + 2x + 5x + 10 = 0$ — $10 = 2 \times 5$

या, $x(x+2) + 5(x+2) = 0$ — तथा $2 + 5 = 7$

या, $(x+2)(x+5) = 0$

अतः $x + 2 = 0$ अथवा $x + 5 = 0$

$\therefore$ $x = -2$ अथवा $x = -5$

...2 : हल कीजिए :

समीकरण $x^2 + x - 6 = 0$

$x^2 + x - 6 = 0$

या, $x^2 + (3-2)x - 6 = 0$

या, $x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$

या, $x(x + 3) - 2(x + 3) = 0$

या, $(x + 3)(x - 2) = 0$

अतः यदि $x + 3 = 0$, तो $x = -3$

और यदि $x - 2 = 0$, तो $x = 2$

निम्नलिखित वर्ग समीकरणों को देखिए

(i) $(2x - 3)(x + 1) = 0$

या, $2x^2 + 2x - 3x - 3 = 0$

या, $2x^2 - x - 3 = 0$

(ii) $(3x + 4)(2x - 5) = 0$

या, $6x^2 - 15x + 8x - 20 = 0$

या, $6x^2 - 7x - 20 = 0$

अतः हम देखते हैं कि यदि x^2 का गुणांक 1 न भी हो, तो भी उसके गुणनखंड करके हल प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 3 : समीकरण $3x^2 + 10x + 8 = 0$ को हल कीजिए :

हल : $3x^2 + 10x + 8 = 0$

या, $3x^2 + (4 + 6)x + 8 = 0$ यहाँ $a = 3$, $b = 10$ तथा $c = 8$

या, $3x^2 + 4x + 6x + 8 = 0$ $a \times c = 3 \times 8 = 24$

या, $x(3x + 4) + 2(3x + 4) = 0$ $24 = 4 \times 6$

या, $(3x + 4)(x + 2) = 0$ तथा $4 + 6 = 10$

अतः $3x + 4 = 0$ अथवा $x + 2 = 0$

जिससे $3x = -4$ अथवा $x = -2$

या, $x = \frac{4}{3}$ अथवा $x = -2$

अतः $x = \frac{4}{3}, -2$

समीकरण के अभीष्ट हल हैं।

उदाहरण 4 : समीकरण $12x^2 - 11x - 15 = 0$ को हल कीजिए।

हल : $12x^2 - 11x - 15 = 0$

या, $12x^2 + (-20 + 9)x - 15 = 0$

या, $12x^2 - 20x + 9x - 15 = 0$ यहाँ $a = 12$, $b = -11$ तथा $c = -15$

या, $4x(3x - 5) + 3(3x - 5) = 0$ $a \times c = 12 \times (-15) = -180$

या, $(3x - 5)(4x + 3) = 0$ $= -20 \times 9$

अतः $3x - 5 = 0$ अथवा $4x + 3 = 0$ तथा $-20 + 9 = -11$

जिससे $3x = 5$ अथवा $4x = -3$

या, $x = \frac{5}{3}$ अथवा $x = \frac{3}{4}$

उत्तर की जाँच : समीकरण के बायें पक्ष में $x = \frac{5}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= 12\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 11\left(\frac{5}{3}\right) - 15$

$= 12 \times \frac{25}{9} - 11 \times \frac{5}{3} - 15 = \frac{100}{3} \ \frac{55}{3} \ \frac{45}{3} = 0$

$=$ **दायाँ पक्ष**

इसी प्रकार समीकरण के बायें पक्ष में $x = \frac{3}{4}$ प्रतिस्थापित करने पर

बायाँ पक्ष $= 12\left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 11\left(-\frac{3}{4}\right) - 15$

$= 12 \times \frac{9}{16} + \frac{33}{4} - \frac{60}{4} = 0$

$=$ **दायाँ पक्ष**

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 5 : समीकरण $3x^2 - 10x - 8 = 0$ को हल कीजिए।

हल : $3x^2 - 10x - 8 = 0$

$(-8) \times 3$ के ऐसे दो गुणनखंड कीजिए जिनका योग -10 हो अर्थात $(-8) \times 3 = -24 = -12 + 2 = -10$ इस प्रकार $3x^2 - 10x - 8 = 0$

या, $3x^2 + (-12 + 2)x - 8 = 0$

या, $3x^2 - 12x + 2x - 8 = 0$

या, $3x(x - 4) + 2(x - 4) = 0$

या, $(x - 4)(3x + 2) = 0$

यदि $x - 4 = 0$, तो $x = 4$

और यदि $3x + 2 = 0$, तो $3x = -2$

$$x = -\frac{2}{3}$$

अतः $x = 4$ और $x = -\frac{2}{3}$

उत्तर की जाँच : $x = 4$ प्रतिस्थापित करने पर,

$3x^2 - 10x - 8 = 3 \times 4^2 - 10 \times 4 - 8$

$= 48 - 40 - 8$

$= 48 - 48 = 0$

= दायाँ पक्ष

और $x = -\frac{2}{3}$ प्रतिस्थापित करने पर,

$3x^2 - 10x - 8 = 3 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 10 \times \left(-\frac{2}{3}\right) - 8$

$= 3 \times \frac{4}{9} + \frac{20}{3} - 8$

$= \frac{4}{3} + \frac{20}{3} - 8 =$

$= \frac{24}{3} - 8 = 8 - 8 = 0$

= दायाँ पक्ष

अतः उत्तर सही है।

अभ्यास 8(c)

हल कीजिए तथा उत्तर की जाँच कीजिए –

1. $3x^2 + 10x + 8 = 0$
2. $(2x - 3)(x + 2) = 0$
3. $x(x - 4) = 0$
4. $x^2 + 7x = 44$
5. $3x^2 + 10x - 8 = 0$
6. $(2x + 1)(x + 3) + 3 = 0$
7. $6x^2 - x = 1$
8. $4y^2 = 11y + 3$
9. $a^2 + a = 90$
10. $x + 1 =$
11. $2x^2 = 12 - 5x$
12. $2x + \frac{4}{x} = 9$
13. $9x^2 - 3x - 2 = 0$
14. $x^2 + 3x - 18 = 0$
15. $x^2 - 3x - 10 = 0$
16. $x^2 - 6x + 9 = 0$
17. $4x^2 - 20x + 25 = 0$
18. $16x^2 + 24x + 9 = 0$
19. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$
    (संकेत $x^2 = y$ मान लेने पर समीकरण का रूपान्तरण $y^2 - 25y + 144 = 0$)
20. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

टिप्पणी : उपर्युक्त प्रश्न 16 एवं 17 में समीकरण का बायाँ पक्ष पूर्ण वर्ग है जिससे x के केवल एक-एक मान ही प्राप्त होते हैं। ध्यान दीजिए, **वर्ग समीकरण के मूलों (अज्ञात चर के मानों) की संख्या अधिकतम 2 होती है।**

उदाहरण 1 समीकरण $\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2}{x^2-1}=2$ को हल कीजिए

हल : $\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2}{x^2-1}=2$

या, $\frac{x^2+2-2}{x^2+2}+\frac{x^2-1+1}{x^2-1}=2$

या, $\frac{x^2+2}{x^2+2}-\frac{2}{x^2+2}+\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=2$

या, $1-\frac{2}{x^2+2}+1+\frac{1}{x^2-1}=2$

या, $-\frac{2}{x^2+2}+\frac{1}{x^2-1}=0$

या, $\frac{1}{x^2-1}=\frac{2}{x^2+2}$

या, $2x^2-2=x^2+2$ (वज्रगुणन करने पर)

या, $2x^2-x^2=2+2$

या, $x^2=4$

दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर,

$x=\pm\sqrt{4}$

$=\pm 2$

अतः $x=2$ और $x=-2$

उत्तर की जाँच :

वर्ग समीकरण का **बायाँ पक्ष** $=\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2}{x^2-1}$

$x^2=4$ ($x=2$ रखने पर)

x^2 का मान समीकरण में रखने पर ($x=-2$ रखने पर)

$=\frac{4}{4+2}+\frac{4}{4-1}$

$=\frac{4}{6}+\frac{4}{3}$

$=\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$

$=\frac{6}{3}$

$=2$

= दायाँ पक्ष

इसी प्रकार $x=-2$ रखने पर,

अतः उत्तर सही है।

उदाहरण 2 : एक स्टीमर चालक नदी के बहाव तथा उसके प्रतिकूल 10 किमी दूरी तय करके 50 मिनट में उसी स्थान पर वापस लौट आता है। यदि स्टीमर की स्थिर जल में चाल 25 किमी/घंटा हो, तो नदी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि नदी की चाल x किमी/घंटा है।

स्टीमर की स्थिर जल में चाल = 25 किमी/घंटा

नदी के बहाव की प्रतिकूल दिशा में स्टीमर की चाल = $(25-x)$ किमी/घंटा

और नदी के बहाव की दिशा में स्टीमर की चाल = $(25+x)$ किमी/घंटा

अतः बहाव की प्रतिकूल दिशा में 10किमी दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{10}{25-x}$ घंटे

और बहाव की दिशा में 10 किमी दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{10}{25+x}$ घंटे

कुल समय $=\left(\frac{10}{25-x}+\frac{10}{25+x}\right)$ घंटे

परन्तु कुल समय = 50 मिनट $=\frac{50}{60}$ घंटे $=\frac{5}{6}$ घंटे

$\therefore\quad \frac{10}{25-x}+\frac{10}{25+x}=\frac{5}{6}$

या, $\frac{2}{25-x}+\frac{2}{25+x}=\frac{1}{6}$

या, $\frac{2(25+x)+2(25-x)}{(25-x)(25+x)} = \frac{1}{6}$

या, $\frac{(50+x)+(50-x)}{(25-x)(25+x)} = \frac{1}{6}$

या, $\frac{100}{625-x^2} = \frac{1}{6}$

या, $600 = 625 - x^2$

या, $x^2 = 625 - 600$

$= 25$

∴ दोनों पक्षों का वर्गमूल लेने पर,

$x = \pm\sqrt{25}$

$= \pm 5$

$x = 5$ और $x = -5$

परन्तु ऋणात्मक मान अग्राह्य है।

$x = 5$

अतः नदी की चाल = 5 किमी/घंटा

उत्तर की जाँच शिक्षार्थी स्वयं करें।

उदाहरण 3 : समीकरण $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{x+1}{x-1}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{2x+13}{x+1}$

या, $\frac{x-1+2}{x-1}+\frac{x-2+4}{x-2}=\frac{2x+2+11}{x+1}$

या, $\frac{x-1}{x-1}+\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x-2}+\frac{4}{x-2}=\frac{2(x+1)+11}{x+1}$

या, $1+\frac{2}{x-1}+1+\frac{4}{x-2}=\frac{2(x+1)}{x+1}+\frac{11}{x+1}$

या, $2+\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-2}=2+\frac{11}{x+1}$

या, $\frac{2}{x-1}+\frac{4}{x-2}=\frac{11}{x+1}$

या, $\frac{2(x-2)+4(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\frac{11}{x+1}$

या, $\frac{2x-4+4x-4}{x^2-3x+2}=\frac{11}{x+1}$

या, $\frac{6x-8}{x^2-3x+2}=\frac{11}{x+1}$

या, $11x^2 - 33x + 22 = (6x-8)(x+1)$

या, $11x^2 - 33x + 22 = 6x^2 + 6x - 8x - 8$

या, $11x^2 - 33x + 22 = 6x^2 - 2x - 8$

या, $11x^2 - 33x + 22 - 6x^2 + 2x + 8 = 0$

या, $5x^2 - 31x + 30 = 0$

या, $5x^2 - 25x - 6x + 30 = 0$

या, $5x(x-5) - 6(x-5) = 0$

या, $(x-5)(5x-6) = 0$

यदि $x - 5 = 0$, तो $x = 5$

और यदि $5x - 6 = 0$

तो $5x = 6$

$x = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$

अतः $x = 5$ और $x = 1\frac{1}{5} = 1.2$

उत्तर का सत्यापन शिक्षार्थी स्वयं करें।

दक्षता अभ्यास - 8

हल कीजिए :

1. $4 - x^2 = 0$
2. $2(x^2 - 121) = 0$
3. $\frac{1}{x^2-6}=\frac{2}{x^2+2}$

4. $\frac{x^2}{x^2+2}+\frac{x^2-5}{x^2-6}=2$

5. $\frac{x-2}{x+2}+\frac{x+2}{x-2}=\frac{5}{2}$

6. वह संख्या ज्ञात कीजिए जो अपने व्युत्क्रम के बराबर हो।

7. एक वर्गाकार क्यारी का क्षेत्रफल 16 वर्ग मी है। इस क्यारी की परिमाप ज्ञात कीजिए।

8. ₹ 289 को कुछ व्यक्तियों में इस प्रकार वितरित करना है कि प्रत्येक व्यक्ति को उतने ही रुपये मिले जितनी व्यक्तियों की कुल संख्या है। व्यक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

9. एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई की 5/4 गुनी है। यदि कमरे की फर्श का क्षेत्रफल 20 वर्ग मी है तो उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10. एक नाव को, जिसकी शान्त जल में चाल 15 किमी/घंटा है, धारा की दिशा में 30 किमी जाने और फिर उसी स्थान पर पुनः वापस आने में कुल समय 4 घंटे 30 मिनट लगता है। धारा की चाल ज्ञात कीजिए।

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

11. $12x^2 + 25x + 12 = 0$

12. $x^2 - 4x - \ = 0$

13. $(a + 1)x^2 + 2ax + (a - 1) = 0$

14. $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x-1}=\frac{6}{x}$

15. $\frac{x+4}{x+5}-\frac{x}{x+1}=\frac{1}{8}$

16. $5x^2 - 16x - 21 = 0$

17. $x^2 - 23x + 132 = 0$

18. $14x^2 + 19x - 3 = 0$

19. $6x^2 + 17x + 12 = 0$

20. $24x^2 - 65x + 21 = 0$

इस इकाई में हमने सीखा है

1. $x^2 = k$ (जहाँ k एक पूर्णांक संख्या है) के रूप वाले समीकरणों को हल करना।
2. $ax^2 + bx + c = 0$ (के प्रकार के समीकरणों को हल करना।
3. समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ पर आधारित वार्तिक प्रश्नों को हल करना

उत्तर माला

अभ्यास 8 (a)

1. ±7 2. $\pm\frac{3}{4}$ 3. $\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$ 4. $\pm\frac{3}{2}$ 5. $\pm\frac{5}{8}$ 6. ±2 7. $\pm2\sqrt{\frac{2}{7}}$ 8. $\pm\frac{1}{2}$ 9. ±2 10. ±5, 11. $\pm\sqrt{\frac{c}{a}}$ 12. ±3 13. ±6 14. $\pm a$ 15. $x = \pm16$ 16. $x = \pm2.5$

अभ्यास 8 (b)

1. 84 मी, 2. 30 मी, 20 मी, 3. 60 मी, 4. 12 5. ±8

अभ्यास 8 (c)

1. - 2, $-1\frac{1}{3}$, 2. $1\frac{1}{2}$, - 2 3. 0, 4 4. - 11, 4 5. -4, $\frac{2}{3}$ 6. - 2, $-1\frac{1}{2}$ 7. $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ 8. 3, $-\frac{1}{4}$ 9. - 10, 9 10. -3, 2 11. -4, $1\frac{1}{2}$ 12. 4, $\frac{1}{2}$ 13. $\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$ 14. (- 6, 3) 15. 5, -2 16. 3 17. $\frac{5}{2}$ 18. $\frac{-3}{4}$ 19. ±3, ±4 20. ±2, ±3

दक्षता अभ्यास 8

1. ±2 2. ±11 3. $\pm\sqrt{14}$ 4. $\pm\sqrt{14}$ 5. ±6 6. 17 7. 5 मी, 4 मी 8. 5 किमी/ घंटा 9. ±1 10. 16 मी 11. $-1\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}$ 12. $4\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ 13. $-1, -\frac{a-1}{a+1}$ 14. 3, $1\frac{1}{3}$ 15. -9, 3 16. $4\frac{1}{5}, -1$ 17. 11, 12 18. $-1\frac{1}{2}, \frac{1}{7}$ 19. $-1\frac{1}{3}, -1\frac{1}{2}$ 20. $2\frac{1}{3}, \frac{3}{8}$

इकाई - 9 समान्तर रेखाएँ

- समान्तर रेखाआें के निम्नांकित प्रगुणों का प्रयोगात्मक सत्यापन

  (i) एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं

  (ii) एक ही रेखा पर लम्ब दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं

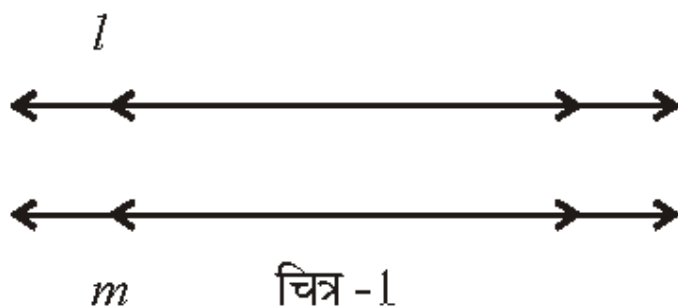
- रचनाएँ

  (i) दिए गए रेखाखंड को पाúच बराबर खंडों में विभ‡‹त करना

  (ii) दिए गए रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभ‡‹त करना

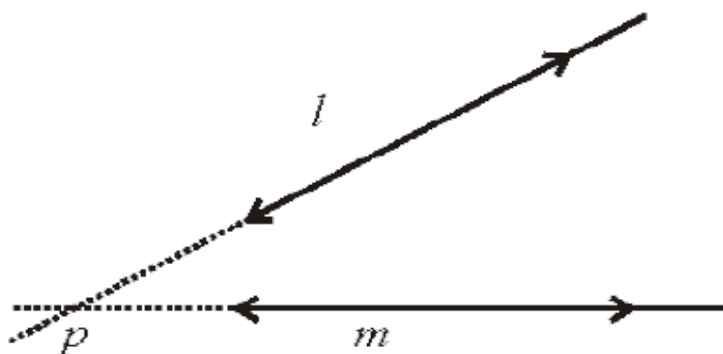
9.1 समान्तर रेखाएँ और उनके प्रगुण

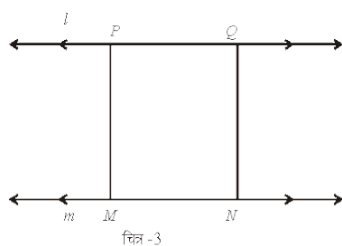
भूमिका

आप को स्मरण होगा कि यदि एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ प्रतिच्छेदित न करें, तो उन्हें समान्तर रेखाएँ कहा जाता है। इस प्रकार दो रेखाएँ तब समान्तर होती हैं, जब (1) वे एक ही तल में स्थित हों, तथा (ii) ये कहाé एक दूसरे को प्रतिच्छेदित न करें।

चित्र -1

पार्श्व चित्र में दो रेखाएँ l और mहैं| इनमें से प्रत्येक को दोनों ओर कितना भी बüढाया जाय ये कहाé पर भी नहाé मिलती हैं| चित्र - 2 को देखिए दो रेखाएँ l और m जब पीछे की और बüढाई जाती हैं, तो वे एक दूसरे को बिन्दु p पर प्रतिच्छेद करती हैं|

यदि एक ही तल में स्थित दो रेखाएँ (दोनों ओर बüढाने पर) कहाé पर न मिलें तो वे समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं|

ि‰ाŠया कलाप 1 :

चित्र -2

पार्श्व चित्र 3को देखिए। l और m दो समान्तर रेखाएँ हैं| रेखा l पर एक बिन्दु P लीजिए। बिन्दु P से रेखा m पर लम्ब PM खाéचिए। इसी प्रकार बिन्दु Q लेकर इससे रेखा m पर लम्ब QN खाéचिए। अब PM और QN को नपिए। हम देखते हैं कि PM = QN

चित्र - 3

अर्थातá एक ही तल में स्थित दो समान्तर रेखाआें के बीच की लम्बवत दूरी सदõव समान होती है। इसीलिए ये रेखाएँ आपस में समान्तर रेखाएँ कहलाती हैं| (सम + अन्तर = समान्तर)

9.1.1 एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं :

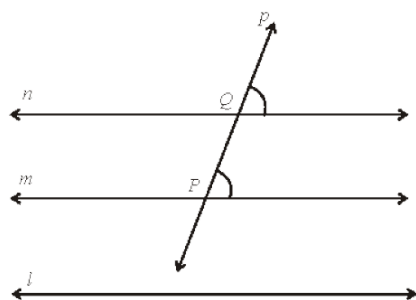
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

यदि एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ, खाéची जाएँ तो ‡‹या वे दोनों रेखाएँ आपस में भी समान्तर होंगी ?

प्रयास कीजिए:

किसी समतल में एक रेखा l खाéचिए। अब सेट स्‡‹वायर की सहायता से रेखा l के समान्तर दो रेखाएँ m और n खाéचिए। ये दोनों रेखाएँ परस्पर समान्तर हैं या नहाé, इसकी जाúच कीजिए।

एक तिर्यक रेखा p इस प्रकार खाéचिए कि यह रेखाआें m और n को ‰ाŠमश: P और Q बिन्दुआें पर काटे।

इसी प्रकार दो और रेखाएँ स्वयं खाéचिए। इनको l से ही प्रदर्शित कीजिए। प्रत्येक रेखा के समान्तर दो-दो रेखाएँ खाéचिए। इन रेखाआें को भी m और n से नामांकित कीजिए। प्रत्येक में कोई तिर्यक रेखा खाéचिए जो इन्हें काटती हो। सुविधा के लिए इन बिन्दुआें के नाम भी P और Q ही लिखिए। अब <P और<Q को नपिए और निम्नांकित तलिका को पूर्ण कीजिए।

चित्र -5

[illegible]	∠P	∠Q	∠P - ∠Q
1.			
2.			
3.			

हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में <P - <Qशून्य है अथवा इतना छोटा है कि इनके मान को छोüडा जा सकता है, अर्थात ,<P = <Q परन्तु <P और<Q संगत कोण हैं, अत: रेखाएँ m और n परस्पर समान्तर हैं| अत:

एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं|

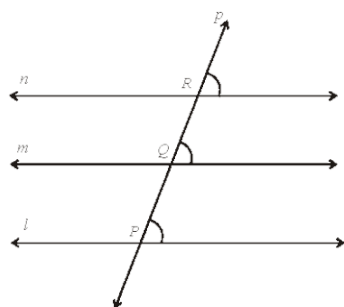
निम्नांकित विकल्प को भी देखिए

रेखा l के समान्तर दो रेखाएँ m और n खाéची गयी हैं| तिर्यक रेखा p इन रेखाआॆं को ‰ाŠमश: बिन्दु P, Q तथा R पर काटती हैं| रेखा n रेखा l के समान्तर खाéची गयी है अत:

<R = <P (संगत कोण हैं|)

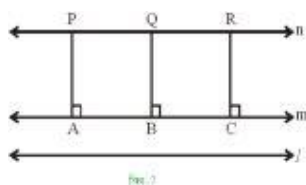
इसी प्रकार हम देखते हैं कि रेखा m रेखा l के समान्तर खाéची गयी है। अत:

< Q = <P (संगत कोण हैं)

उपर्यु‡ãत दोनों निष्कषाô से यह स्पष्ट है कि<P =< Q = < R अर्थातá <Q = <R जो संगत कोण हैं| अत: रेखा m और n परस्पर समान्तर हैं|

चित्र -6

अत: एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं|

इसे कीजिए

एक सादे कागज पर रेखा l खाéचिए। पटरी और गुनिया की सहायता से रेखा l के समान्तर दो रेखाएँ m और n खाéचिए। रेखा n पर तीन बिन्दु P, Q और R लीजिए। इन बिन्दुआॆं से रेखा m पर लम्ब PA, QB और RC खाéचिए।

इसी प्रकार के दो चित्र और बनाइए। सुविधा के लिए इन पर चित्र (i), (ii) और (iii) अंकित कीजिए। अब PA, QB और RC को मपिए। तीनों चित्रों में PA-QB, QB-RC और RC-PA ज्ञात कीजिए तथा निम्नांकित सरिणी को पूरा कीजिए

चित्र	PA	QB	RC	PA-QB	QB-RC	RC-PA
(i) (ii) (iii)						

आपने ‡‹या देखा ? आप ने देखा कि प्रत्येक चित्र में अन्तर PA-QB, QB-RC और RC-PA या तो शून्य है या इतना कम है कि इसे छोüडा जा सकता है।

इस प्रकार प्रत्येक दशा में PA=QB=RC दूसरे शब्दों में रेखा m और n के बीच की लम्बवत दूरी PA, QB और RC समान है। इस प्रकार $m \| n$

इस प्रकार आपने देखा :

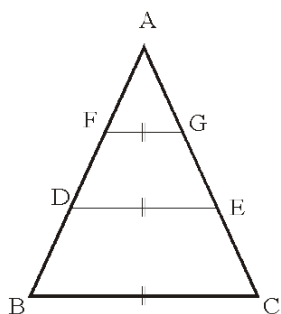
एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं|

ध्यान दीजिए :

उपर्यु‡‹त प्रगुण कापुनर्कथन निम्नांकित प्रकार से भी किया जा सकता है।

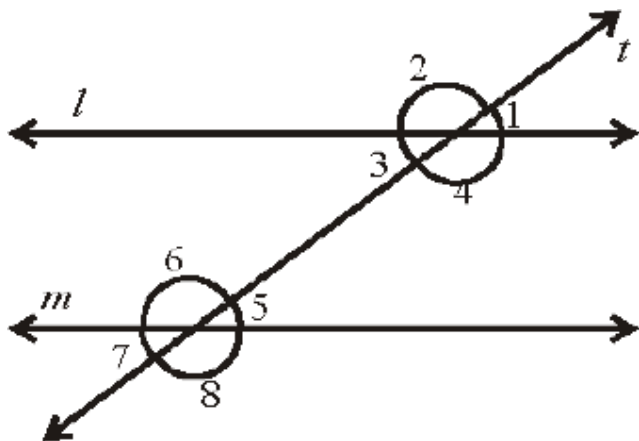
एक ही रेखा के समान्तर दो रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेदित नहाé कर सकताé।

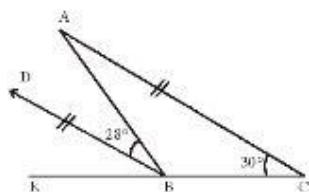
प्रश्नावली 9 (a)

1. दी हुई रेखा AB से 5 सेमी की दूरी पर AB के समान्तर एक रेखा खाéचिए।
2. किसी दी हुई रेखा के, बाहर स्थित बिन्दु से हो कर जाने वाली, एक समान्तर रेखा खाéचिए।
3. पार्श्व चित्र में त्रिभुज ABC के आधार BC के समान्तर DE और FG रेखा खंड खाéचे गए हैं|

निम्नलिखित के उत्तर दीजिए :

(i) कितने समलम्ब हैं ?

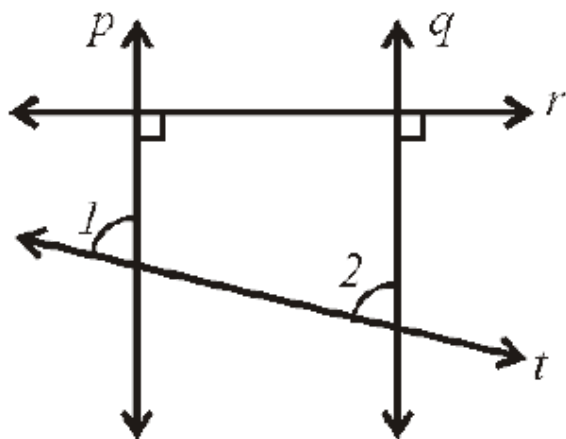
(ii) कितने त्रिभुज हैं ?

4. पार्श्व चित्र में l और m दो समान्तर रेखाएँ तथा t एक तिर्यक रेखा है। यदि <1 = 30°, शेष कोणों 2, 3, 4, 5, 6, 7 और 8 के मान ज्ञात कीजिए।

चित्र - 9

5. पार्श्व चित्र में ABC एक त्रिभुज है तथा BD भुजा AC के समान्तर है,<ACB = 30° तथा < ABD = 28°, <ABC, <DBK और ,<BAC के मान ज्ञात कीजिए।

चित्र - 10

6. पार्श्व चित्र में $r \perp p$,ौर $r \perp q$

चित्र - 11

(i) ‡‹या $p \| q$? ‡‹यों ?

(ii) यदि $p \| q$ ।था<1 = 63°तो <2 का मान

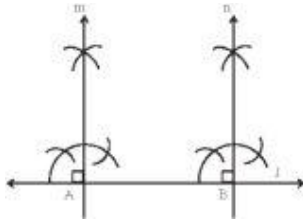
ज्ञात कीजिए ?

9.1.2 एक ही रेखा पर दो लम्ब रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

‡‹या एक रेखा पर खाéचे गये दो लम्ब परस्पर समान्तर होंगें ?

प्रयास कीजिए :

एक रेखा l खाéचिए। इस पर दो बिन्दु A और B लीजिए। बिन्दु A और B से रेखा l पर लम्ब रेखाएँ m और n खाéचिए।

चित्र - 12

इसी प्रकार दो और रेखाएँ खाéचिए। इन्हें भी l से प्रदर्शित कीजिए और इन पर कोई दो-दो बिन्दु ले कर लम्ब रेखाएँ m और n खाéचिए। सुविधा के लिए दोनों बिन्दुआें को A और B से नामांकित कीजिए। अब कोण A और B को नपिए और निम्नांकित तलिका में रि‡‹त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

चित्र की संख्या	∠A	∠B	∠A - ∠B
1.			
2.			
3.			

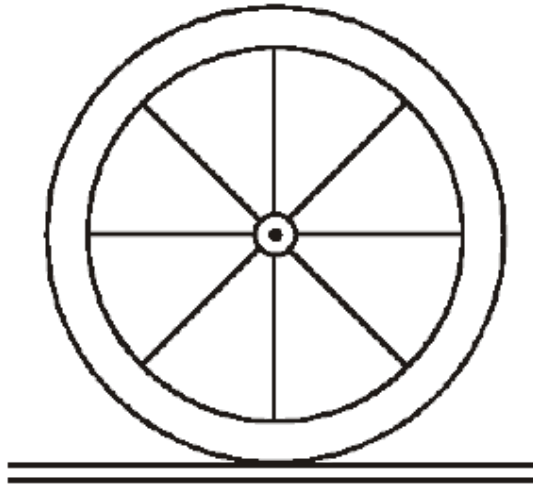
हम देखते हैं कि प्रत्येक स्थिति में <A - <Bका मान शून्य है अथवा इतना छोटा है कि इसके मान को छोüडा जा सकता है अर्थात <A = <B परन्तु <A और <B संगत कोण हैं अत: रेखाएँ m और n परस्पर समान्तर हैं|

पुन: रेखा l के बाहर दो बिन्दु P और Q लीजिए। इन बिन्दुआें से रेखा l पर लम्ब PA और QB खाéचिए। कोणों<A और <B को नाप कर देखिए कि ‡‹या दोनों कोण बराबर हैं ? कोण A और B में ‡‹या सम्बन्ध है ?

दोनों कोण संगत कोण हैं और बराबर हैं| अत: रेखाएँ m और n परस्पर समान्तर हैं|

अत: एक ही रेखा पर लम्ब रेखाएँ परस्पर समान्तर होती हैं|

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

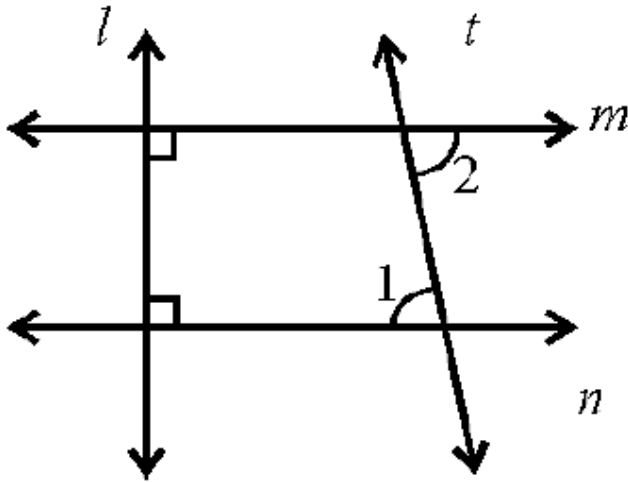
चित्र 14 में $l \| m$ और $m \| n$ यदि <1 = 65°, तो <2 ज्ञात कीजिए ?

चित्र 14

चित्र में $l \parallel m$ और $m \parallel n$,तो

$l \parallel n$ (‡‹यों)

<2 = <1 = 65° (कारण लिखिए)

इसे भी कीजिए

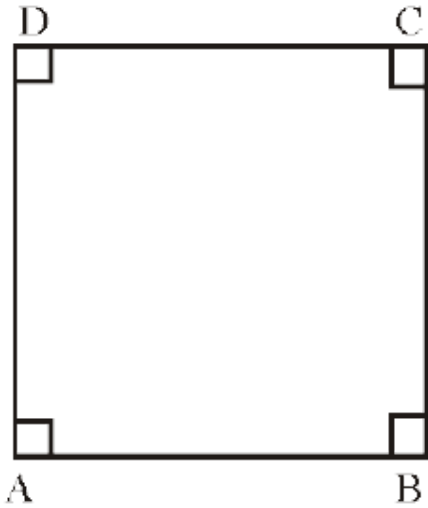
निम्नांकित चित्र 15 में $m \perp l$, $n \perp l$ और तिर्यक रेखा t, रेखा n और m के साथ %‰◌IŠमश: <1 और <2 बनाती हैं, यदि
< 1 = 80° तो <2 ज्ञात कीजिए।

चित्र 15

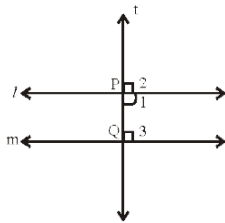
$m \perp l$,◌ौर $n \perp l$ (दिया है)

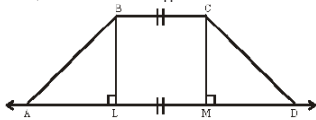
$m \parallel n$ (कारण लिखिए)

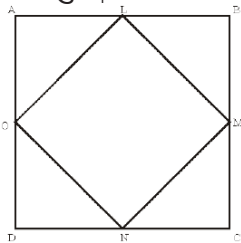
<2 =<1 = 80° (‡‹यों)

अभ्यास 9 (b)

1.चित्र-16 में चतुर्भुज ABCD का प्रत्येक कोण समकोण हैं| सत्यपित कीजिए कि AB|| CD और AD ||BC

चित्र -16

2. पार्श्व चित्र में दो रेखाएँ l और m जिसे एक तिर्यक रेखा t बिन्दुआें P और Q पर काटती हैं| यदि <2 = <3 = 90° तो सत्यपित कीजिए कि रेखाएँ l और m परस्पर समान्तर हैं| <1 + <3 का मान कितना होगा ?

चित्र -17

3. ABCD एक समलम्ब है जिसमें AD ||BC है। रेखा खंड BL और CM रेखा AD पर लम्ब हैं| दिखाइये कि BL || CM। यदि BC = BL तो दिखाइये कि BCML एक वर्ग है।

चित्र -18

4. ABCD एक वर्ग है तथा L, M, N और O %oाŠमश: भुजाआें AB, BC, CD तथा DA के मध्य बिन्दु हैं| कोण तथा भुजाएँ नापकर देखिए कि आ‡ðŠति LMNO भी एक वर्ग है।

चित्र -19

5. त्रिभुज ABC में कोण B एक समकोण है। M भुजा AC का मध्य बिन्दु हैं और M से AB पर ML लंब खाéचा गया है। यदि MN भुजा BC पर लम्ब है तो दिखाइए कि आ‡ðŠति LMNB एक आयत है।

6. पार्श्व चित्र में $l \parallel m$, $p \perp m$ और $p \perp n$

(i) ‡‹या $m \parallel n$? ‡‹यों ?

(ii) ‡‹या $l \parallel n$? ‡‹यों ?

(iii) ‡‹या $p \perp l$? ‡‹यों ?

9.2 रचनाएँ

9.2.1 दिए गए रेखाखंड को बराबर खंडों में विभ‡‹त करना ,

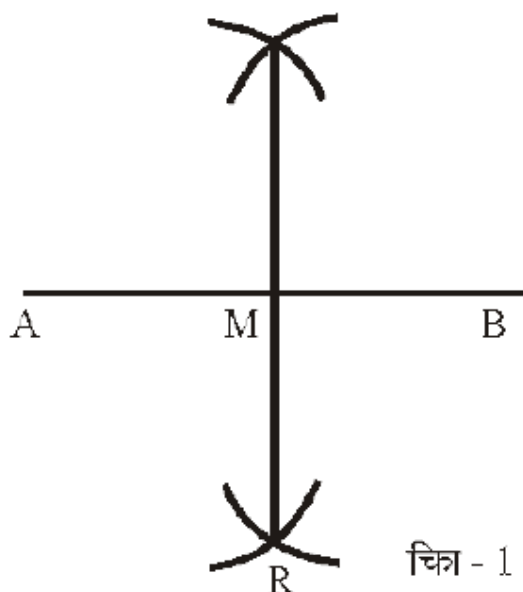
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए

1. ‡‹या रेखा खंड AB = 4 सेमी खाéच कर उस पर ऐसा बिन्दु C निर्धारित किया जा सकता है, जो उसे दो बराबर भागों में विभजित कर दे ?

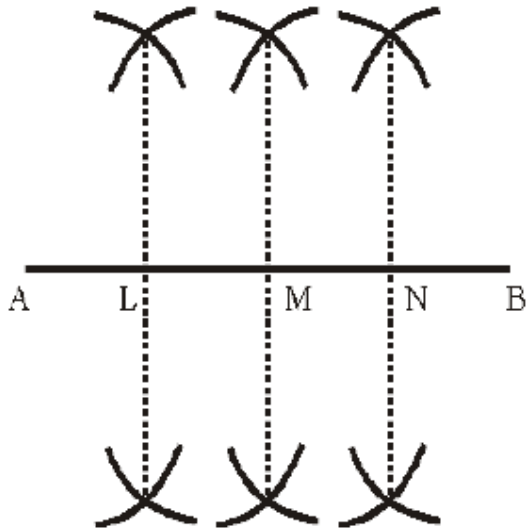
2. ‡‹या रेखा खंड AB = 4.7 सेमी खाéचकर, उस पर ऐसा बिन्दु C ज्ञात कर सकते हैं, जो उसे दो बराबर भागों में विभजित कर दे ?

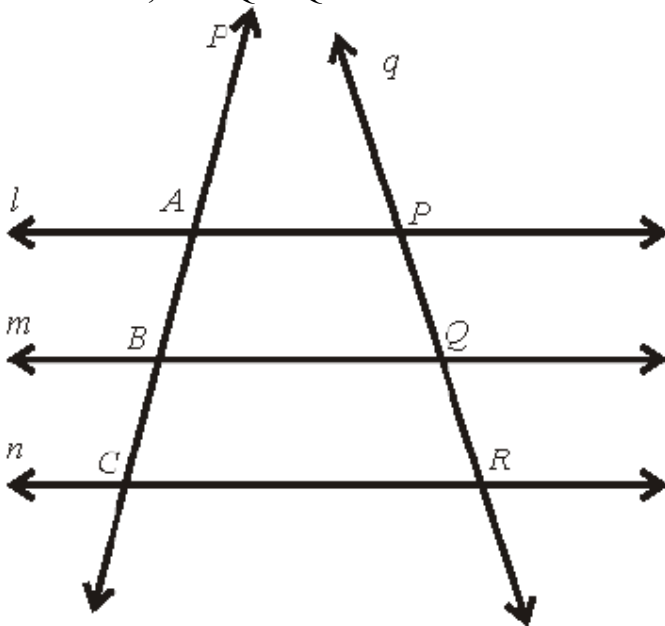
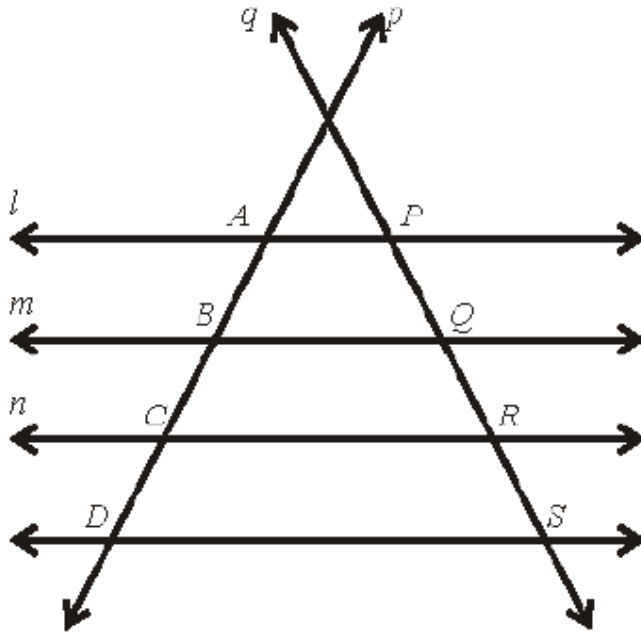
3. ‡‹या रेखाखंड AB = 7 सेमी खाéचकर उसे पाúच बराबर भागों में बाúट सकते हैं ?

इसे कीजिए

पार्श्व चित्र में AB रेखाखंड पर बिन्दु M इस प्रकार लिया गया है कि रेखाखंड AM = MB हम देखते हैं कि बिन्दु M रेखाखंड AB को दो बराबर भागों में विभ‡‹त करता है।

चित्र - 1

इसी प्रकार चित्र - 2 को देखिए। बिन्दु L, M और N रेखा खंड AB को चार बराबर भागों में विभ‡‹त करते हैं| इस प्रकार हम किसी रेखा खंड को 2, 22, 23,।।। बराबर भागों में विभ‡‹त कर सकते हैं|

किसी रेखाखंड को पाώच, छह, सात या दिए गए बराबर भागों में पटरी एवं परकार की सहायता से ‡õŠसे विभ‡‹त कर सकते हैं ?

चित्र - 2

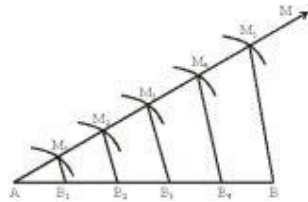
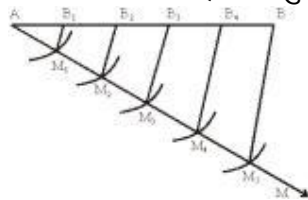
परस्पर समान्तर रेखाएँ l, m और n खाέचिए और निम्नांकित चित्र - 3 को देखिए। दो तिर्यक रेखाएँ p और q खाέचिए। यदि अन्त: खंड AB = BC तो हम जानते हैं कि अन्त:खंड PQ = QR। इसी प्रकार चित्र - 4 को देखिए। हम जानते हैं कि यदि AB = BC = CD, तो PQ = QR = RS।

9.2.2 किसी दिए रेखाखंड को पाúच बराबर भागों में विभ‡‹त करना

निमóय - 1

रेखाखंड AB को पाúच बराबर रेखाखंडों में विभ‡‹त करना।

ज्ञात है : रेखाखंड AB

रचना करनी है : रेखा खंड AB को पाúच बराबर खंडों में विभ‡‹त करना।

रचना के चरण :

1. रेखा AB के बिन्दु A से न्यून कोण बनाते हुए ऊपर या नीचे की ओर (चित्रानुसार) एक किरण AM खाéचिए।
2. परकार में कोई दूरी लेकर किरण AM में A से प्रारम्भ कर के पाúच समान रेखाखंड काट लीजिए। इन्हें AM1, M1M2, M2M3, M3M4 तथा M4M5 से चिह्नित कीजिए।
3. आन्तिम चिह्नित बिन्दु M5 को B से मिलाइये।

4. M5 B के समान्तर M4, M3, M2, तथा M1 से समान्तर रेखाएँ खाéचिए जो AB को %‰ाŠमश: बिन्दुआें B4, B3, B2 तथा B1 पर मिलती हैं|

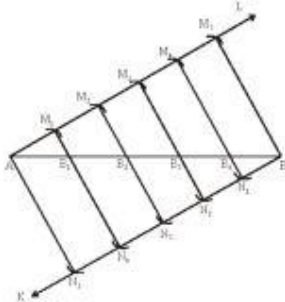
बिन्दु B1, B2, B3 तथा B4 रेखाखंड AB को पाúच बराबर खंडों में विभ‡‹त करते हैं|

सत्यापन : प्रत्येक रेखाखंड AB1, B1B2, B2B3, B3B4 तथा B4B को नपिए और सत्यपित कीजिए कि

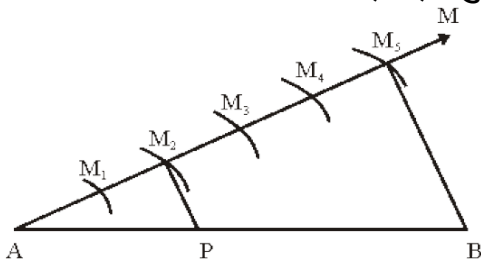
AB1= B1B2= B2B3= B3B4= B4B

हम देखते हैं कि सभी रेखाखंड बराबर हैं|

वõकल्पिक विधि

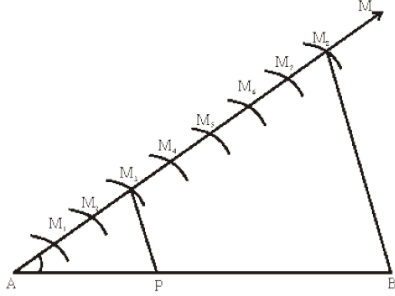
रेखाखंड AB को पाúच बराबर रेखाखंडों में विभ‡‹त करना।
रचना के चरण:

1. रेखाखंड AB के एक अंत्य बिन्दु माना A, से न्यूनकोण बनाती हुई एक किरण AL खाéचिए।
2. दूसरे अन्त्य बिन्दु B से होकर जाने वाली तथा AL के समान्तर किरण BK खाéचिए।
3. किसी दूरी की त्रिज्या लेकर AL किरण के पाúच समान भाग अंकित कीजिए जो AM1, M1M2, M2M3, M3M4, M4M5 से दर्शाए गए हैं|
4. इसी प्रकार किरण BK पर उसी दूरी की त्रिज्या से पाúच समान भाग अंकित कीजिए जो BN1, N1N2, N2N3, N3N4, N4N5 से दर्शाए गए हैं|
5. आन्तिम चिह्नित बिन्दु M5को B से तथा N5 को A से मिला दीजिए। इसी प्रकार M4 को N1 से M3 को N2 से M2को N3से तथा M1 को N4 से मिला दीजिए।
6. ये रेखाएँ, रेखा खंड AB को ‰ाŠमश: चार बिन्दुआें B4, B3, B2 तथा B1 परपर काटते हैं|

इस प्रकार बिन्दु B1, B2, B3, तथा B4 रेखाखंड AB को पाúच बराबर खंडों में विभ‡‹तकरते हैं|

निमóय 2
9.2.3 दिये गये रेखाखंड को दिए गए अनुपात में विभ‡‹त करना

ज्ञात है : रेखा खंड AB
रचना करनी है : रेखाखंड AB को 2 और 3 के अनुपात में विभ‡‹त करना।
रचना के चरण :
1. रेखाखंड AB के बिन्दु A से न्यून कोण बनाती हुई किरण AM खाéचिए।

2. आनुपतिक अंक 2 और 3 के योग 5 के बराबर किरण AM में A से प्रारम्भ करके किसी त्रिज्या से पाúच समान रेखा खंड AM1, M1M2, M2M3, M3M4 तथा M4M5 चिह्नित कीजिए।

3. आन्तिम चिह्नित बिन्दु को रेखा खंड के अन्त्य बिन्दु B से मिलाइए।

4. M5B के समान्तर M2 से एक रेखा खंड M2P खाéचिए जो रेखा खंड AB को P पर काटती है।
यही बिन्दु P रेखाखंड AB को 2 : 3 में विभ‡‹त करता है।
उदाहरण 1 : एक रेखाखंड 6.4 सेमी माप का खाéच कर, इसे पाúच बराबर भागों में विभ‡‹त कीजिए।

रचना के चरण :

1. रेखाखंड AB = 6.4 सेमी खाéचिए।
2. रेखाखंड के अन्त्य बिन्दु A से न्यून कोण बनाती हुई किरण AL खाéचिए।
3. किसी त्रिज्या से किरण AL पर पाúच बराबर भाग AM1, M1M2, M2M3, M3M4 तथा M4M5 अंकित कीजिए।
4. बिन्दु M5 को B से मिलाइए।
5. M4, M3, M2 तथा M1 से BM5 के समान्तर रेखाएँ खाéचिए जो रेखाखंड AB को ‰ाŠमश: F, E, D और C बिन्दु पर काटते हैं|

इस प्रकार बिन्दु C, D, E और F रेखा खंड AB को पाúच बराबर खंडो में विभ‡‹त करते हैं|
उदाहरण 2 : रेखा खंड 8 सेमी नाप का खाéचिए। इसे 3 : 5 में विभ‡‹त कीजिए।
रचना के चरण :

1. एक रेखा खंड AB = 8 सेमी खाéचिए।
2. रेखाखंड के अन्त्य बिन्दु A से न्यून कोण बनाती हुई किरण AM खाéचिए।
3. रेखाखंड को 3 : 5 में विभ‡‹त करना है अत: इनके आनुपतिक योग 3 + 5 = 8 के बराबर किरण AM में A से प्रारम्भ करके किसी त्रिज्या से आठ समान रेखाखंड चिह्नित कीजिए।

इनको M1, M2, M3, M4, M5, M6, M7 तथा M8 से नामांकित कीजिए।

4. अब बिन्दु M8 को बिन्दु B से मिलाइए।
5. M8 B के समान्तर M3 से M3P खाéचिए जो AB को P पर काटती है। यही बिन्दु P रेखा खंड AB को 3 : 5 में विभ‡‹त करता है।

नोट : इन रचनाआें को निर्मेय 1 की वैकल्पिक विधि का प्रयोग कर सुगमता से ज्ञात किया जा सकता हैं।

प्रश्नावली 9 (c)

1. 10 सेमी का एक रेखाखंड AB खाéच कर इसको पाúच बराबर भागों में पटरी परकार की सहायता से विभ‡‹त कीजिए। माप कर प्रत्येक भाग की लम्बाई जाúचिए।
2. एक 8 सेमी लम्बे रेखाखंड को 2 : 3 keंs अनुपात में विभ‡‹त कीजिए। इस प्रकार प्राप्त दोनों भाग की लम्बाई माप कर सत्यपित कीजिए की इनका अनुपात 2 : 3 है।
3. 8 सेमी माप का रेखाखंड AB खाéचिए। अन्त्य बिन्दु A से इस रेखाखंड का3 /5भाग रचना द्वारा ज्ञात कीजिए।
4. 8.4 सेमी का एक रेखाखंड AB खाéचिए। इस पर एक बिन्दु P रचना द्वारा इस प्रकार ज्ञात कीजिए कि AP=2/5 AB

उत्तर माला

अभ्यास 9 (a)

3. (i) तीन (ii) तीन 4. <2,,<4,<6 और<8 = 1500 ; <3, <5 और <7 = 30°

5. <ABC = 122°, <DBK = 30°, <BAC = 28° ,6 (i) हाँ, $p \| q$ क्योंकि संगत कोण समान हैं। (ii) <2=63°

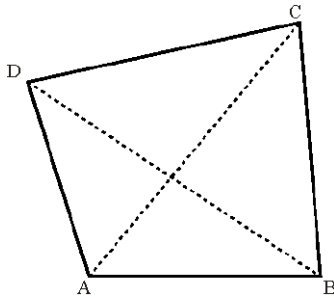
अभ्यास 9 (b)

2. 180^0

इकाई - 10 चतुर्भुज की रचनाएँ

- चतुर्भुज की रचना करना जब कि :
- चार भुजाएँ और एक विकर्ण ज्ञात हों।
- तीन भुजाएँ तथा दोनों विकर्ण दिए हों।
- दो संलग्न भुजाएँ और उनके बीच का कोण तथा अन्य दो कोण दिए हों।
- तीन भुजाएँ और दो मध्यस्थ कोण दिए हों।
- चार भुजाएँ और एवं वं◌ोण दिए हों।

10.1 भूमिका

हम पिछली कक्षाआ◌ें में कुछ ज्यमितीय आ‡ðŠतियों यथा त्रिभुज, चतुर्भुज, वðत्त आदि के बारे में परिचय प्राप्त कर चुके हैं| उनके कुछ प्रगुणों का भी हमने अध्ययन किया है तथा त्रिभुजों की विभिन्न अंग दिए होने पर रचनाएँ भी की हैं| इस इकाई में हम चतुर्भुजों की रचना विभिन्न स्थितियों में करना सीखेंगे।

इन्हें कीजिए

1. पार्श्व चित्र में चतुर्भुज A, B, C, D को देखकर निम्नांकित सारणी को पूरा कीजिए।

क्रम संख्या	चतुर्भुज ABCD के अंग	चतुर्भुज ABCD के अंगों के नाम
(i)	चार शीर्ष	A, B, ...
(ii)	चार भुजाएँ	AB, ...
(iii)	चार कोण	... B, C और D......
(iv)	संलग्न भुजाएँ	AB और AD, ...
(v)	विकर्ण	AC और ....
(vi)	सम्मुख कोण	A और C, ...
(vii)	सम्मुख भुजाएँ	भुजा AB की सम्मुख भुजा DC, AD की सम्मुख भुजा...

2. निम्नांकित सरिणी में दिये गये चतुर्भुज की विशेषताएँ रि‡‹त स्थानों में भरिए -

ध्यान दें, ज्यमिति में हम केवल उत्तल चतुर्भुजों के गुणों का अध्ययन करते हैं|

सोचिए, चर्चा कीजिए एवं लिखिए

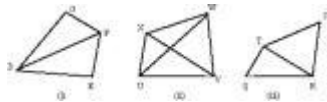
1. ‡‹या समान्तर चतुर्भुज एक आयत हो सकता है ?
2. ‡‹या वर्ग एक आयत भी है ?
3. ‡‹या वर्ग एक समचतुर्भुज भी है ?

सामद=हिक चर्चा कीजिए

निम्नांकित कथनों में सत्य एवं असत्य कथनों को बताइये

(i) चतुर्भुज में दो विकर्ण होते हैं|
(ii) चतुर्भुज की चारों भुजाएँ सदõव बराबर होती हैं|
(iii) चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ सदõव समान होती हैं|
(iv) वर्ग वह समचतुर्भुज है जिसके चारों कोण समकोण होते हैं|
(v) आयत वह समान्तर चतुर्भुज है जिसके चारों कोण समकोण होते हैं|
(vi) चतुर्भुज के चारों अन्त: कोणों का योग 360° होता है।
(vii) समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण समान होते हैं|
(viii) चतुर्भुज के दोनों विकर्ण एक दूसरे को समद्विभजित करते हैं|

,भ्यास 10 (a)

1. निम्नांकित चतुर्भुजों के चित्रों के आधार पर ‰ oाŠमानुसार उनकी भुजाआें, शीषाô, कोणों अõर विकणाóं के नाम बताइए।

2 .किसी चतुर्भुज के तीन कोण ‰ oाŠमश: 75^0, 95^0 ,और110^0 है। चौथे कोण का मान ज्ञात कीजिए।

3.यदि किसी चतुर्भुज के दो कोण 60^0 तथा 120^0 के हैं तथा शेष दोनों कोण समान हैं, तो उसके मान ज्ञात कीजिए।

4.निम्नलिखित चतुर्भुजों की आ‡õŠतियाँ खाéचिए :

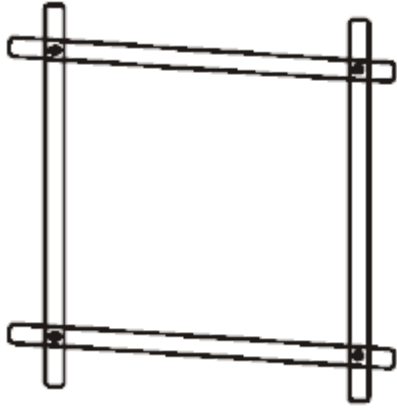
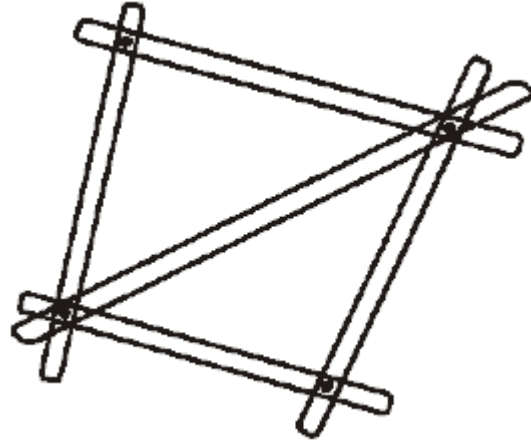
(i) समलम्ब (ii) उत्तल चतुर्भुज (iii) अवतल चतुर्भुज (iv)पतंग (kite)

10.2 चतुर्भुज की रचना करना जब कि उसकी चारों भुजाएँ ,औरएक विकर्ण ज्ञात हो

चित्र - 1 चित्र - 2

इन्हें कीजिए

लकüडी की चार पतली पटिáटयाँ लीजिए। कीलों की सहायता से चारों पटिáटयों को चित्रानुसार ढीला जिोüडए। जोüडने के बाद बनी बन्द आ‡õŠति को देखिए ,औरबताइए यह कौन सी ज्यमितीय आ‡õŠति हैं :

हमने देखा यह चतुर्भुज है जिसे चित्र - 1 में दर्शाया गया है।

चित्र - 1 चित्र - 2

अब किन्हाé दो पटिáटयों को दबाइए अथवा खाéचिए। देखिए चतुर्भुज का रूप बदल गया। अत: केवल चार पटिáटयों से चतुर्भुज के विभिन्न रूप बनते हैं| कोई स्थिर चतुर्भुज नहाé बनता है।
अब आमने-सामने के किन्हाé दो कोणों को एक ,औरपटáटी से जिोüडए। ‡‹या चतुर्भुज की निश्चित आ‡ðŠति बन गई।

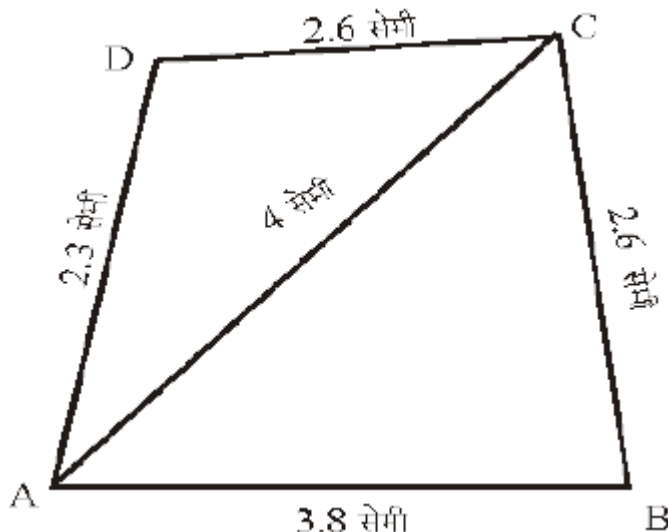
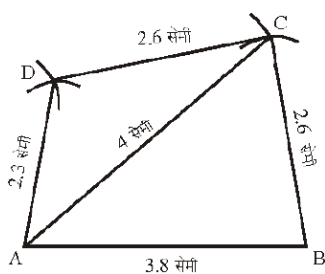
इस स्थिति में चतुर्भुज की एक निश्चित आ‡ðŠति बन गई।

अत:

चतुर्भुज की चारों भुजाआें के आतिरि‡‹त एक विकर्ण भी ज्ञात होने पर इसकी रचना की जा सकती है।

उदाहरण : चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 3.8सेमी, BC = 2.6 सेमी, CD = 2.6 सेमी, AD = 2.3 सेमी ,औरविकर्ण AC = 4.0 सेमी है।

विश्लेषण : - चतुर्भुज ABCD का कच्चा चित्र (रपŠ चित्र) बनाइए इसमें विकर्ण AC खाéचिए। चतुर्भुज काé सभी नापों को कच्चे चित्र में अंकित कीजिए। कच्चे चित्र को देखने से स्पष्ट है कि यह चतुर्भुज Δ ADC और Δ ABC से मिलकर बना है जिसमें से प्रत्येक की तीनों भुजाएँ ज्ञात हैं| इन्हें बनाने से चतुर्भुज की रचना पूरी हो जायगी।

रचना

(i). AB = 3.8 सेमी का रेखाखंड खाींचिए।

(ii). बिन्दु B से 2.6 सेमी का चाप ,औरबिन्दु A से 4 सेमी का चाप लगाइए।

(iii). दोनों चापों के कटान बिन्दु का नाम C लिखिए। भुजा AC ,औरBC खाींचिए।

(iv). बिन्दु A से 2.3 सेमी का चाप ,औरबिन्दु C से 2.6 सेमी का चाप लगाइए ,और कटान बिन्दु का नाम D लिखिए।

(v). भुजा AD ,औरCD खाींचिए। इस प्रकार बना चतुर्भुज ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

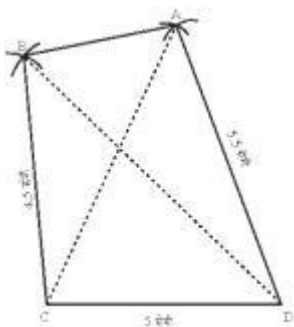
अभ्यास 10 (b)

1. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए, जब कि AB = 4.0 सेमी, BC = 6.0 सेमी, CD = DA = 5.2 सेमी ,औरAC = 8 सेमी।
2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 4.4 सेमी, BC = 4 सेमी, CD = 6.4 सेमी, DA = 2.8 सेमी ,औरBD = 6.6 सेमी, AC की लम्बाई नापकर लिखिए।
3. एक चतुर्भुज PQRS बनाइए, जहाँ PQ = 3 सेमी, QR = 5 सेमी, QS = 5 सेमी, PS = 4 सेमी ,औरSR = 4 सेमी। PR को नपिए।
4. एक समचतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसकी प्रत्येक भुजा 4.5 सेमी ,औरएक विकर्ण 6.0 सेमी हो। दूसरे विकर्ण को नाप कर लिखिए।
5. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जहाँ AB = 3.6 सेमी, BC = 4.2 सेमी ,औरAC = 6.5 सेमी ,औरशेष भुजाओं को नाप कर उनकी माप अपनी उत्तर पुस्तिका पर लिखिए।

चतुर्भुज की रचना, जब कि तीन भुजाएँ ,औरदोनों विकर्ण ज्ञात हों :

उदाहरण : एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसकी भुजा BC = 4.5 सेमी, CA = AD = 5.5 सेमी, CD = 5 सेमी ,औरBD = 7 सेमी हो।

विश्लेषण : रफ चित्र बना कर उनके अंगों की नाप अंकित कर देने पर स्पष्ट है कि इसमें दो त्रिभुज ADC ,औरत्रिभुज BDC की रचना करके बिन्दु A ,औरB को मिला देने पर चतुर्भुज ABCD की रचना सरलता पूर्वक की जा सकती है। चतुर्भुज ABCD की रचना में विकर्ण दिखाना आवश्यक नहीं है, क्यों ?

रचना :

(i) CD = 5.0 सेमी लम्बाई का रेखाखंड खाéचिए।

(ii) बिन्दु C से CB = 4.5 सेमी त्रिज्या लेकर चाप खाéचिए।

(iii) बिन्दु D से DB = 7.0 सेमी त्रिज्या लेकर दूसरा चाप लगाइए जो पहले चाप को काट दे। इस कटान बिन्दु को B से नामांकित कीजिए।

(iv) बिन्दु C से त्रिज्या CA = 5.5 सेमी का CD के उसी ओर जिधर बिन्दु B है, पुन: चाप लगाइए।

(v) बिन्दु D को केन्द्र ले कर त्रिज्या DA = 5.5 सेमी त्रिज्या से दूसरा चाप लगाइए जो चरण (iv) में खीचें गये चाप को काट दे। इस बिन्दु को A से प्रदर्शित कीजिए।

(vi) DA, AB ,औरBC मिलाइए। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

अभ्यास 10 (c)

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जबकि AB = 3.8 सेमी, BC = 3 सेमी, AD = 2.3 सेमी, AC = 4.5 सेमी ,औरBD = 3.8 सेमी। CD की माप नापकर ज्ञात कीजिए।
2. चतुर्भुज ABCD बनाइए, जिसमें BC = 7.5 सेमी, AC = AD = 6 सेमी, CD = 5 सेमी ,औरBD = 10 सेमी। चौथी भुजा की माप नाप कर ज्ञात कीजिए।
3. एक समान्तर चतुर्भुज बनाइए, जिससे एक भुजा 4.4 सेमी तथा दोनों विकर्ण ‰ाŠमश: 5.6 सेमी ,और7.0 सेमी हों। दूसरी भुजा की माप ज्ञात कीजिए।

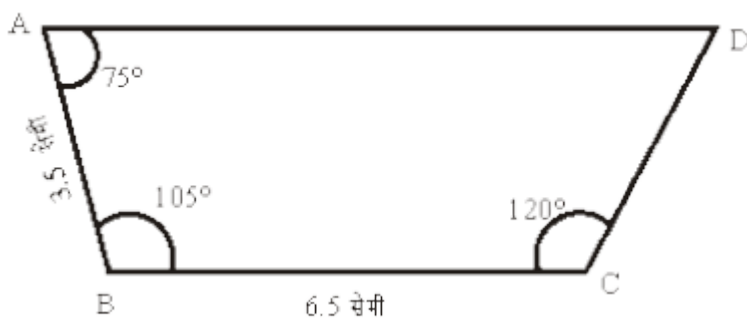
(संकेत - समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को समद्विभजित करते हैं|)

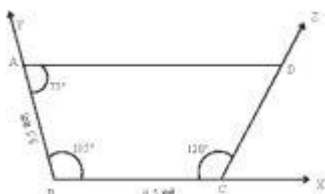
4. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए, जिसमें AB = 3.0 सेमी, CD = 3.0 सेमी, DA = 7.5 सेमी, AC = 8.0 सेमी ,औरBD = 5.5 सेमी
5. एक वर्ग बनाइए जिसका विकर्ण 6.4 सेमी हो।

(संकेत - वर्ग के विकर्ण एक दूसरे को समकोण पर समिद्विभजित करते हैं|)

10.4 चतुर्भुज की रचना करना जब कि दो संलग्न भुजाएँ ,औरउनके बीच का कोण तथा अन्य दो कोण ज्ञात हों।

उदाहरण : एक चतुर्भुज ABCD बनाइए जहाú AB = 3.5 सेमी, BC = 6.5 सेमी, <B = 105°, <A = 75° और < C = 120°

विश्लेषण : रपŠ चित्र बनाकर देखिए। BC = 6.5 सेमी लम्बाई के रेखाखंड के बिन्दु B पर 1050 ,औरC पर 1200 का कोण बनाती रेखा खाéचे ,और105° के कोण बनाती रेखा में से 3.5 सेमी भाग काट कर A बिन्दु अंकित कर 75° का कोण बनाती रेखा खाéचे तो यह रेखा 120° के कोण वाली रेखा को D पर काटेगी। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज होगा।

रपŠ चित्र

रचना के चरण :

1. चित्रानुसार <XBY = 105° बनाइए।
2.बिन्दु B से AB = 3.5 सेमी त्रिज्या से एक चाप लगाइए जो BY को विन्दु A पर काटे।
3.बिन्दु B से BC = 6.5 सेमी त्रिज्या से दूसरा चाप लगाइए जो BX को बिन्दु C पर काटे।
4.विन्दु C पर एक किरण CZ इस प्रकार खाéचिए कि<ZCB = 120°
5.विन्दु A पर एक रेखाखंड AD इस प्रकार खाéचिए कि<DAB = 75° ,औरAD किरण, CZ को बिन्दु D पर काटे। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

प्रयास कीजिए

चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें AB = 3.5 सेमी, BC = 5 सेमी, <A = 80°, <B = 105° और<D =85°

अभ्यास 10 (d)

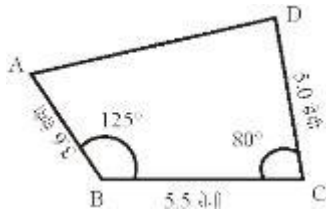
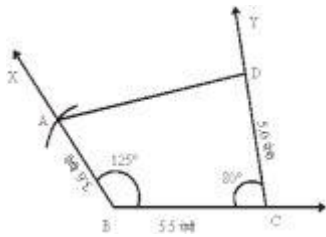
1. चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें, AB = 5.5 सेमी, BC = 3.7 सेमी, <A = 60°, <B = 105° और <D = 90°
2. एक आयत की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 4.5 सेमी ,और6 सेमी हों। इसके दोनों विकणाô को नपिए।
3. चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए, जिसमें PQ = 3.5 सेमी, QR = 6.5 सेमी, <P = <R = 105° और < S = 75°

   (संकेत - <Q = 360° - (105° + 105° + 75°) = 75°)
4. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए जब कि BC = 5.5 सेमी, CD = 4.1 सेमी, <A = 70°, <B = 110° और <D = 85° AB ,औरDA को नपिए।

10.5 चतुर्भुज की रचना जब कि तीन भुजाएँ ,औरदो मध्यस्थ कोण ज्ञात हों

उदाहरण : एक चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जब कि AB = 3.6 सेमी, BC = 5.5 सेमी, CD = 5.0 सेमी, < B = 1250 और< C = 800

विश्लेषण : रपŠ चित्र से स्पष्ट है कि BC = 5.5 सेमी रेखा खंड के बिन्दु B ,औरC पर %‰ाŠमश: 125° ,और80°का कोण बनायें तथा कोण बनाने वाली रेखाआें में से %‰ाŠमश: 3.6 सेमी ,और5.0 सेमी भाग काट कर मिला दें। अभीष्ट चतुर्भुज बन जायेगा।

रचना :

(i) ãचित्रानुसार BC = 5.5 सेमी बनाइए।

(ii) बिन्दु B पर एक किरण BX इस प्रकार खाéचिए कि <XBC = 1250

(iii) बिन्दु C पर एक किरण CY इस प्रकार खाéचिए कि <YCB = 800 तथा बिन्दु X ,औरY रेखा BC के एक ही ओर हों।

(iv) केन्द्र B से त्रिज्या AB = 3.6 सेमी से एक चाप खाéचिए जो किरण BX को A पर काटे।

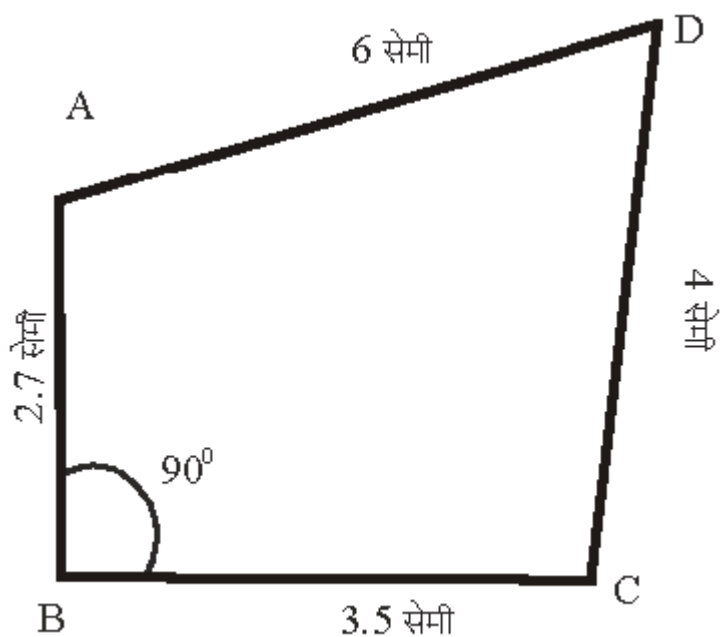
(v) केन्द्र C से त्रिज्या CD = 5.0 सेमी से एक ऐसा चाप खाéचिए जो CY को D पर काटे।

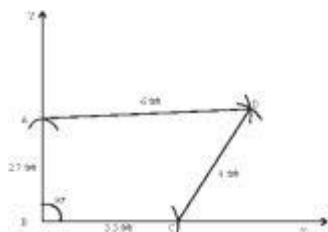
(vi) AD को मिलाइए। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

अभ्यास 10 (e)

1. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए, जबकि AB = 4.2 सेमी, BC = 3.6 सेमी, CD = 4.8 सेमी, <B = 30° और <C = 150° भुजा AD मपिए
2. चतुर्भुज PQRS बनाइए जिसमें PQ = 3.5 सेमी, QR = 2.5 सेमी, RS = 4.1 सेमी <Q = 750, <R = 120° भुजा RS मपिए
3. चतुर्भुज ABCD बनाइए जिसमें AB = BC = 3 सेमी, AD = 5 सेमी, <A = 90°, <B= 105°
4. एक चतुर्भुज PQRS की रचना कीजिए जिसमें <Q = 1350, <R = 900, QR = 5 सेमी, PQ = 9 सेमी ,औरRS = 7 सेमी।

10.6 चतुर्भुज की रचना जबकि चार भुजाएँ ,औरएक कोण दिया हो

उदाहरण : चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = 2.7 सेमी, BC = 3.5 सेमी, CD = 4 सेमी, AD = 6 सेमी और <B = 90°

विश्लेषण - रपŠ चित्र बनाइए। इसे देख कर चतुर्भुज की रचना कीजिए।

रचना :

1. चित्रानुसार <XBY = 90° बनाइए।
2. केन्द्र B से BA = 2.7 सेमी त्रिज्या से एक चाप लगाइए, जो BY को A पर काटे।
3. केन्द्र B से BC = 3.5 सेमी त्रिज्या से दूसरा चाप लगाइए जो BX को C पर काटे।
4. केन्द्र A से AD = 6 सेमी त्रिज्या से एक चाप AB के उस ओर खाéचिए जिस ओर C हो।
5. केन्द्र C से CD = 4 सेमी त्रिज्या से एक चाप इस प्रकार खाéचिए जो पद 4 के चाप को D पर काटे।
6. AD ,औरCD को मिलाइए। ABCD अभीष्ट चतुर्भुज है।

अभ्यास 10 (f)

1. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसमें AB = BC = 3 सेमी, AD = CD = 5 सेमी तथा <ABC = 120° हो।

2. चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए, जिसमें AB = 2.8 सेमी, BC = 3.1 सेमी, CD = 2.6 सेमी, DA = 3.3 सेमी और <A = 60° हो।

3. एक आयत की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ 4.2 सेमी ,और2.5 सेमी हो। इसके विकर्ण की लम्बाई नपिए।

4. एक समचतुर्भुज की रचना कीजिए जिसमें एक कोण 750 तथा एक भुजा 5.2 सेमी हो।

5. एक वर्ग बनाइए, जिसकी एक भुजा 5.0 सेमी हो।

दक्षता अभ्यास - 10

1. निम्नांकित नाप से चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए।

(i) AB = 2.5 सेमी, BC = 7.5 सेमी, CD = 10 सेमी, DA = 7.5 सेमी,BD = 6.5 सेमी

(ii) AB = 4 सेमी, BC = 3 सेमी, CD = 6 सेमी, <B = 1350, <C = 60°

(iii) BC = 4 सेमी, <C = 120°, CD = 5 सेमी, <BDA = 26°,<A = 64°

2. एक वर्ग ABCD की रचना कीजिए, जिसकी भुजाए 4 सेमी हो। AC को नपिए।

3. एक आयत ABCD बनाइए जब कि AB = 4 सेमी ,औरAC = 6 सेमी हो। AD को नपिए।

4. समान्तर चतुर्भुज ABCD की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ 5.8 सेमी, 6.2 सेमी तथा विकर्ण 7.3 सेमी हों। इसका दूसरा विकर्ण माप कर लिखिए।

5. एक आयत ABCD बनाइए, जबकि AB = 5 सेमी, AC = 6 सेमी। < BAD मपिए

6. एक चतुर्भुज ABCD बनाइए, जिसमें AB = 4.1 सेमी, BC = 4.5 सेमी, CD = 3 सेमी, AD = 3.7 सेमी तथा विकर्ण AC = 4.2 सेमी।

7. एक समबहुभुज के अन्त:कोण की माप 1080 है तो उसके भुजाआ ें की संख्या होगी।

(i) 5 (ii) 6 (iii) 7 (iv) 8

(एन.टी.एस.. 2007)

सोचिए चर्चा कीजिए ,औरलिखिए :-

किसी बहुभुज की रचना करने के लिए (2n-3) स्वतंत्र आúकüडे आवश्यक होते हैं, जहाú n भुजाआ ें की संख्या है। इस कथन के आधार पर त्रिभुज, चतुर्भुज ,औरपंचभुज बनाने के लिए %‰ाŠमश: कितने स्वतन्त्र आúकüडे ज्ञात होने चहिए ?

हमने ‡‹या चर्चा की ?

चतुर्भुज की रचना करना जबकि चतुर्भुज की :-

(i) चार भुजाएँ ,औरएक विकर्ण ज्ञात हो।

(ii) तीन भुजाएँ तथा दोनों विकर्ण ज्ञात हों।

(iii) दो संलग्न भुजाएँ ,औरउनके बीच का कोण तथा अन्य दो कोण ज्ञात हों।

(iv) तीन भुजाएँ ,औरदो मध्यस्थ कोण ज्ञात हों।

(v) चार भुजाएँ ,औरएक कोण ज्ञात हो।

उत्तर माला

अभ्यास 10 (a)

1.(i) भुजाएँ DE, EF, FG तथा GD; शीर्ष D, E, F तथा G; कोण <D, <E, <F तथा <G; विकर्ण DF (ii) भुजाएँ UV, VW, WX तथा XU; शीर्ष U, V, W तथा X कोण <U, <V, <W तथा<X विकर्ण UW तथा VX (iii) भुजाएँ QR, RS, ST तथा TQ; शीर्ष Q, R, S तथा T कोण <Q, <R, <S तथा <T; विकर्ण QS तथा RT

2. 80° 3.90° तथा 90°

अभ्यास 10 (f)

3. 4.9 सेमी

दक्षता अभ्यास 10

2. 5.7 सेमी, 7.(i) 5,

इकाई - 11वाणिज्य गणित

चक्रव=द्धि ब्याज की गणना (जबकि पूरी समयावधि 3 इकाई से अधिक न हो)

(अ) अर्धवार्षिक

(ब) तिमाही

वस्तुओं के मूल्य में व=द्धि एवं घाटे की दर

11.1 भूमिका

आज बाजार में ऋण वितरण कराने वाली संस्थाओं की भरमार है। ये संस्थाएँ उपभोक्ता को अपनी शर्त पर ऋण उपलब्ध कराती हैं और उपभोक्ता से ब्याज सहित किश्तों में अपने धन की वसूली करती है। अब प्रायः सभी संस्थाएँ चक्रव=द्धि ब्याज की दर से उपभोक्ताओं के लिए ऋण उपलब्ध करती हैं।

जब कोई व्यक्ति किसी महाजन, साहूकार या संस्था से किन्हीं अवधि के लिए ब्याज की शर्त (त्रैमासिक, अद्र्धवार्षिक या वार्षिक) पर रुपया उधार लेता है, तो लिये गये धन पर पहली अवधि (तीन माह, छः माह या एक वर्ष) का ब्याज मूलधन में मिल कर अगली अवधि के लिए मूलधन हो जाता है, अर्थात् पहली अवधि पश्चात प्राप्त मिश्रधन दूसरी अवधि के लिए मूलधन व दूसरी अवधि के पश्चात प्राप्त मिश्रधन तीसरी अवधि के लिए मूलधन हो जायेगा। अन्त में प्राप्त मिश्रधन का प्रारम्भिक मूलधन से अन्तर ही मूलधन पर कुल अवधि का चक्रव=द्धि ब्याज होगा।

11.2 चक्रव=द्धि ब्याज की गणना

आइए हम जाने कि चक्रव=द्धि व्याज की गणना वैâसे करते है।

हम जानते हैं कि :

1. $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$

जहाँ P= मूलधन, r= ³ ब्याज की दर तथा ह =समय तथा

A= चक्रव=द्धि मिश्रधन को प्रदर्शित करते हैं।

2. n वर्ष का चक्रव=द्धि ब्याज=चक्रव=द्धि मिश्रधन - मूलधन

$$= P \left\{ \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - 1 \right\}$$

यहाँ हम देखते हैं कि सूत्र में, मिश्रधन, मूलधन, दर और समय में कोई तीन राशि ज्ञात होने पर चौथी अज्ञात राशि की गणना आसानी से की जा सकती है।

उदाहरण 1. रुपये 400 का 10%वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल: हम जानते हैं कि मिश्रधन =मूलधन $\left(1 + \frac{\text{दर}}{100}\right)^{\text{समय}}$

मान रखने पर= $400 \left(1 + \frac{10}{100}\right)^2$

$= 400 \left(\frac{11}{10}\right)^2$

$= 400 \times \frac{11 \times 11}{100}$

· ` 484

चक्रव=द्धि ब्याज =चक्रव=द्धि मिश्रधन - मूल

= ` 484 - ` 400

= ` 84

प्रयास कीजिए :

1. ` 25,600 पर 6.25³ वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष का चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
2. किस धन पर 10³ वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के चक्रव=द्धि ब्याज और साधारण ब्याज का अन्तर ` 200 होगा

11.2.1 चक्रव=द्धि ब्याज की गणना करना जबकि ब्याज (अ) अर्धवार्षिक (छमाही) (ब) तिमाही संयोजित हो।

आइए हम जाने कि -

किसी धन का वार्षिक ब्याज दर दी गई हो तो उसे अर्धवार्षिक छमाही ब्याज दर और तिमाही ब्याज दर में वैâसे परिवर्तित करते हैं।
अब नीचे दी गयी सारणी को ध्यान से देखिए

वार्षिक ब्याज दर	5%	8%	10%	12%	$12\frac{1}{2}$%	20%
छमाही ब्याज दर	$\frac{5}{2}\% = 2\frac{1}{2}\%$	$\frac{8}{2}\% = 4\%$	$\frac{10}{2}\% = 5\%$	$\frac{12}{2}\% = 6\%$	$\frac{12\frac{1}{2}}{2}\% = 6\frac{1}{4}\%$	$\frac{20}{2}\% = 10\%$
तिमाही ब्याज दर	$\frac{5}{4}\% = 1\frac{1}{4}\%$	$\frac{8}{4}\% = 2\%$	$\frac{10}{4}\% = \frac{5}{2}\%$	$\frac{12}{4}\% = 3\%$	$\frac{25}{4\times2}\% = \frac{25}{8}\%$	$\frac{20}{4}\% = 5\%$

हम जानते हैं कि :

(ग्) 1 वर्ष में 2 अद्र्‌ध वर्ष या 2 छः माह होते हैं। इसलिए वार्षिक ब्याज दर को छमाही या अद्र्‌धवार्षिक ब्याज दर में बदलने के लिए वार्षिक दर में 2 से भाग देते हैं। जैसा कि सारणी के छमाही ब्याज दर में दिखाया गया है।

(ग्ग्) वार्षिक ब्याज दर को तिमाही ब्याज दर में बदलने के लिए वार्षिक ब्याज दर में 4से भाग दिया गया है। क्योंकि एक वर्ष में 4तिमाही होता है।

इसी प्रकार वर्ष में दी गई अवधि को छमाही या तिमाही अवधि में बदलने के लिए सारणी 2 को देखिए

निम्नांकित तालिका ध्यान से देखिए और नीचे पूछे गए प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

हम जानते हैं कि :

एक वर्ष 12 माह का होता है इसलिए एक वर्ष को 2 अद्र्‌धवार्षिक या 2 छमाही भाग में विभक्त कर सकते हैं। इसी प्रकार 1760.ज्हु वर्ष को 3 छमाही और 2वर्ष को 4छमाही अवधियों में बाँट सकते हैं।

अब एक वर्ष के 12 माह को 4तिमाही अवधि में विभक्त कर सकते हैं। अतः 1 वर्ष =4तिमाही

चूँकि 1 वर्ष =2 छमाही = 4तिमाही

इसलिए 1 वर्ष: छमाही : तिमाही= 1 : 2 : 4

प्रयास कीजिए :

• ापुनम्रांकित सारणी में ब्याज दर तथा समयावधि का परिवर्तन चक्र दिया गया है। रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

• 5ज्ञ् वार्षिक ब्याज दर को छमाही और तिमाही ब्याज दर में बदलिए ।

• 8 छमाही अवधि में वर्ष और तिमाही अवधि ज्ञात कीजिए ।

उपयुत्तâ से हम निम्नलिखित निष्कर्ष पर पहुँचते हैं :

1. यदि ब्याज छमाही देय है तो :

(अ) वर्षों में दी गई अवधि में 2 से गुणा करके, उसे छमाही में बदल देते हैं । (ब) वार्षिक दर प्रतिशत में 2 का भाग करके, छमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं ।

2. यदि ब्याज तिमाही देय हो तो :

(अ) वर्षों में दी गयी अवधि में 4से गुणा करके उस अवधि को तिमाही में बदल देते हैं।

(ब) वार्षिक दर प्रतिशत में 4से भाग करके, तिमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं ।

रूपान्तरण अवधि :

समयावधि सामान्यतः वर्षों में होती है। परन्तु ब्याज, प्रति छमाही, प्रति तिमाही या प्रतिमाह भी लिया जा सकता है। वह समयावधि, जिसके लिए प्रत्येक ब्याज, नया मूलधन प्राप्त करने के लिए मूलधन में जोड़ा जाता है (संयोजित किया जाता है), रूपान्तरण अवधि कहलाती है ।

उदाहरण 2. ` 2000 का 10ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष का मिश्रधन तथा चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए यदि ब्याज अर्धवार्षिक देय है ।

हल : प्रश्नानुसार,

मूलधन (इ) = ` 2000

दर (r) = 10ज्ञ् वार्षिक = 5ज्ञ् अर्धवार्षिक (छमाही)

समय (ह) = 1 वर्ष = 2 छमाही

मिश्रधन=P$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

= ` 2000 $\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$

= ` 2000× $\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$

· ` 2205

चक्रव=द्धि ब्याज =मिश्रधन - मूलधन

· ` 2205.00 - ` 2000

· ` 205.00205.00

प्रयास कीजिए :

` 1600 का 10ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से 6 मास का चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज प्रति तिमाही संयोजित किया जाता है ।

उदाहरण 3. एक बैंक घरेलू किसी खाते पर 8ज्ञ् वार्षिक ब्याज देता है। परन्तु प्रति 6 माह के बाद ब्याज मूलधन में जोड़ देता है। यदि संजू ` 250 इस समय जमा कराये तो उसे एक वर्ष बाद कितना ब्याज मिलेगा ?

हल : प्रश्नानुसार,

झ् = ` 250

r = 8ज्ञ् वार्षिक = $\frac{8}{2}$% अर्धवार्षिक (छमाही)

ह = 1 वर्ष = 2 छमाही

मिश्रधन · ` P$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

= ` 250

= ` 250 $\left(1+\frac{1}{25}\right)^2$

= ` 250 ×

= `

= ` $\frac{1352}{5}$

= ` 270.40

चक्रव=द्धि ब्याज · ◌Iqमश्रधन - मूलधन

· ` 270.40 - ` 250.00

· ` 20.40

उदाहरण 4. कितने समय में ` 800 का मिश्रधन ` 926.10 हो जायेगा जबकि चक्रव=द्धि ब्याज की दर 10 प्रतिशत वार्षिक है और ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है ?

हल : प्रश्नानुसार, झ् = ` 800

A = ` 926.10

r = 10ज्ञ् वार्षिक = 5ज्ञ् अर्धवार्षिक (छमाही)

ह = ?

मिश्रधन · ` P$\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

या, P $\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$ · मिश्रधन

प्रश्नानुसार, $800\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$ · 926.10

या] [X] · $\frac{926.10}{800}$

या] $\left(\frac{2}{0}\right)^{n} = \frac{926.1}{800}$

$\left(\frac{2}{0}\right)^{n} = \left(\frac{2}{0}\right)^{3}$

इसलिए 1889.ज्हु

अत: समय =3 छमाही · $1\frac{1}{2}$ वर्ष

प्रयास कीजिए :

1. ` 2000 रुपये पर 10³ वार्षिक ब्याज की दर से 1 वर्ष का साधारण ब्याज और चक्रव=िद्ध ब्याज ज्ञात कीजिए। याfद ब्याज अर्धवार्षिक देय हो तो 1 वर्ष का चक्रव=िद्ध ब्याज क्या होगा? ज्ञात कीजिए कि वार्षिक दर से प्राप्त ब्याज तथा अर्धवार्षिक ब्याज दर से प्राप्त ब्याज में कितना अन्तर है और क्यों है ?

2. 'रूपान्तरण' से क्या तात्पर्य है? 6 तिमाही का रूपान्तरण वर्ष में क्या होगा? बताइए।

उदाहरण 5. किसी ब्याज की दर से ` 31250 की धनराशि 1899.ज्हु वर्ष में ` 35152 हो जाती है, जबकि ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाता है। वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ।

हल : प्रश्नानुसार, झ् = ` 31250

A = ` 35152

n = $1\frac{1}{2}$ वर्ष =3 छमाही

ब्याज दर = r ज्ञ् प्रतिवर्ष = $\frac{r}{2}$%प्रति छमाही

$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$

या, $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n} = A$

या, $P\left(1+\frac{r}{2\times100}\right)^{n} = A$, n छमाही लेने पर

प्रश्नानुसार, $31250\left(1+\frac{r}{2\times100}\right)^{3} =$ ` 35152

या, $\left(1+\frac{r}{2\times100}\right)^{3} = \frac{35152}{31250} = \frac{17576}{15625} = \left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

या, $\left(1+\frac{r}{2\times100}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)$

या, $\frac{r}{2\times100} = \frac{2}{3} - 1 = \frac{1}{3}$

या, $r = \frac{2 \times 100}{3}$
= 8
अत: ब्याज दर =8ज्ञ् वार्षिक
अभ्यास 11 (a)
1. किसी धन का 2 वर्ष में चक्रव=द्धि ब्याज से मिश्रधन ` 2400.00 तथा 3 वर्ष में मिश्रधन ` 2520.00 हो जाता है तो वार्षिक ब्याज दर होगी।
(a) 6³ (ं) 5³ (म्) 7.5³ (ृ) 10³
2. यािद ब्याज तिमाही संयोजित किया जाय तो 8ज्ञ् वार्षिक ब्याज दर के रूपान्तरण का सही विकल्प होगा :
(a) 5ज्ञ् (ं) 4ज्ञ् (म्) 2ज्ञ् (ृ) 1ज्ञ्
3. नीचे 2 समूह A और ँ दिए गये हैं। A समूह में प्रश्न और ँ समूह में प्रश्नों के उत्तर क्रम बदलकर दिए गये हैं। सही क्रम का चुनाव करके लिखिए :
प्रथम समूह A द्वितीय समूह ँ
(a) एक वर्ष में तिमाही की संख्या (श्) 5ज्ञ्
(ं) 10ज्ञ् छमाही ब्याज दर का तिमाही (N) 6
ब्याज दर में रूपान्तरण
(म्) 3 वर्ष में होने वाले छमाही रूपान्तरण की संख्या (झ्) 4
(ृ) 1971.ज्हु वर्ष के लिए ब्याज दर यािद 5ज्ञ्वार्षिक ब्याज दर हो (R) 1976.ज्हुज्ञ्
4. ` 100 का 10ज्ञ् वार्षिक की दर से 2 वर्ष का चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए ।
5. ` 500 का 15ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से एक वर्ष के चक्रव=द्धि ब्याज और साधारण ब्याज में अन्तर क्या होगा ?
6. कोई धन 12ज्ञ् वार्षिक चक्रव=द्धि ब्याज की दर से एक वर्ष के लिए दिया जाता है यािद ब्याज प्रति तिमाही देय हो तो प्रति तिमाही ब्याज की दर बताइए ।
7. ` 2000 का 10ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष का चक्रव=द्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, यािद ब्याज प्रति छमाही संयोजित किया जाय ।

८. १९८६.ज्हुज्ञ् वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कितने वर्ष में ` ६४० का मिश्रधन ` ८१० हो जायेगा?
९. ` १६,००० का ५ज्ञ् प्रति छमाही ब्याज की दर से १९९१.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।
१०. ` ८००० का १०ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से १९९६.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति छमाही लगाया जाता है ।
११. ` ५१२० का १२.५ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २००१.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज बताइए जबकि ब्याज प्रति तिमाही देय है ।
१२. किस ब्याज की दर से ` ४००० पर ९ माह में ६३०.५० रुपये चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा यािद ब्याज प्रति तिमाही संयोजित होता है ?

१३. कितने समय में १०ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से ` १२००० पर ` १२३० चक्रवृद्धि ब्याज मिलेगा याfद ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है?

११.३ वस्तुओं के मूल्य में वृद्धि एवं घाटे की दर

हम अपने दैनिक जीवन में देखते हैं कि पौधे बढ़कर वृक्ष, बच्चे बढ़कर किशोर और फिर युवक हो जाते हैं। गत वर्ष की जनसंख्या बढ़कर वर्तमान वर्ष में और अधिक हो जाती है। जनसंख्या की यह बढ़त चक्रवृद्धि ब्याज की भाँति होती है। इस तरह की वृद्धि को 'धनात्मक वृद्धि' कहते हैं। इसका अर्थ है कि समय के बढ़ने से मान भी चक्रवृद्धि के रूप में बढ़ता है। इस दशा मे चक्रवृद्धि मिश्रधन के सूत्र में मूलधन के स्थान पर प्रारम्भिक मूल्य, जनसंख्या इत्यादि, दर के स्थान पर प्रतिवर्ष की वृद्धि दर और समय के स्थान पर दी गई अवधि कोरख कर अन्तिम या निर्धारित वर्ष का मूल्य या जनसंख्या इत्यादि ज्ञात कर लेते हैं। पुनः निर्धारित अवधि में वृद्धि को, अन्तिम स्थिति में से प्रारम्भिक स्थिति के मान कोघटाकर ज्ञात कर लेते हैं। जैसा कि आगे दिये गये उदाहरणों से स्पष्ट है।

याfद किसी वस्तु का वर्तमान मूल्य रु. झ् हो तथा मूल्य में वार्षिक वृद्धि दर २००७.ज्हु³ हो तो ह वर्ष उपरान्त उसके मूल्य A की गणना के लिए सूत्र कोनिम्न प्रकार से प्रतिपादित करते हैं।

प्रथम वर्ष पश्चात् मूल्य ़ झ् २०१२.ज्हु

द्वितीय वर्ष पश्चात् मूल्य ़ झ् २०१७.ज्हु

ह वर्ष पश्चात् मूल्य ़ झ् २०२२.ज्हु

अत: A ़ झ् २०२७.ज्हु

उदाहरण ६. एक नगर क्षेत्र की जनसंख्या में ५ज्ञ् प्रतिवर्ष की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्तमान जनसंख्या १२००० हो तो दो वर्ष बाद जनसंख्या कितनी होगी ?

हल: वर्तमान जनसंख्या · १२००० · झ्

समय (ह) · २ वर्ष

r (प्रतिशत प्रतिवर्ष वृद्धि दर) ़ ५

मान लिया २ वर्ष बाद जनसंख्या ़ A

A ़ झ् २०३२.ज्हु में मान प्रतिस्थापित करने पर

अत: A ़ १२००० २०३७.ज्हु

़ १२००० २०४२.ज्हु २०४७.ज्हु

़ १३२३०

अत: २ वर्ष पश्चात् नगर क्षेत्र की जनसंख्या १३,२३० होगी।

उदाहरण ७. एक शहर की जनसंख्या १०००००० से बढ़कर तीन वर्ष में ११५७६२५ हो जाती है। वार्षिक वृद्धि की
दर ज्ञात कीजिए ।
हलः प्रश्नानुसार
शहर की वर्तमान जनसंख्या ृ १०००००० ृ झ्
बढ़कर तीन वर्ष में हुई जनसंख्या ृ ११५७६२५ ृ A
वृद्धि की दर प्रतिशत प्रतिवर्ष ृ r
समय-अवधि वर्ष में ृ ३ ृ ह
अतः A ृ झ् २०५२.ज्हु में मान प्रतिस्थापित करने पर,
या, ११५७६२५ ृ १०००००० २०५८.ज्हु
या, १०००००० २०६३.ज्हु ृ ११५७६२५
या, २०६८.ज्हृ २०७३.ज्हु
या, २०७८.ज्हृ २०८३.ज्हु
या, २०८८.ज्हृ २०९३.ज्हु
या, २०९८.ज्हु ृ २१०३.ज्हु-१
ृ २१०९.ज्हु
या r ृ ५
वार्षिक वृद्धि दर ृ ५ ज्ञ्
उदाहरण ८. एक साइकिल बनाने वाली कम्पनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष ५ज्ञ्की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्ष २००० में उत्पादन ४०,००० हो तो वर्ष २००२ में कितना उत्पादन होगा ?
हलः साइकिलों की संख्या जो वर्तमान वर्ष में बनी (झ्) ृ ४०,०००
प्रतिशत वृद्धि की दर प्रतिवर्ष (r) ृ ५
समय (ह) ृ २ वर्ष
मान लिया २ वर्ष बाद साइकिलों की संख्या ृ A
तो A ृ झ् २११४.ज्हु
२११९.ज्हु २१२४.ज्हु
२१२९.ज्हु २१३४.ज्हु
२१३९.ज्हु२१४४.ज्हु
२१४९.ज्हु२१५४.ज्हु
२१५९.ज्हु
अतः वर्ष २००२ में ४४,१०० साइकिलों का उत्पादन होगा ।
उदाहरण ९. एक कार बनाने वाली कम्पनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष १०ज्ञ् की वृद्धि होती है। याfद वर्तमान में उत्पादन ६०००० कार वार्षिक हो, तो

कितने वर्षों बाद उत्पादन ७९८६० कार वार्षिक हो जायेगा ?

हल:

कारों का वर्तमान उत्पादन प्रतिवर्ष (झ्) ृ ६००००

प्रतिशत वृद्धि की दर प्रतिवर्ष (r) ृ १०

माना ह वर्षों बाद उत्पादन प्रतिवर्ष (A) ृ ७९८६०

सूत्र : A ृ झ् २१६५.ज्हु

७९८६० ृ ६०००० २१७०.ज्हु

ृ ६०००० २१७५.ज्हु

२१८०.ज्हु २१८५.ज्हु

२१९०.ज्हु

२१९५.ज्हु

अर्थात्   २२००.ज्हु

अत: ३ वर्षों बाद उत्पादन ७९८६० कार प्रतिवर्ष हो जायेगा।

११.३.१   मूल्य में घाटे (कमी) की दर अथवा अवमूल्यन की दर

हम देखते हैं कभी-कभी समय के बढ़ने के साथ-साथ वस्तुओं के मूल्यों में कमी हो जाती है। यथा मशीन, स्वूâटर, कार या अन्य सम्पत्तियाँ जब पुरानी हो जाती हैं, तो उनके मूल्य में कमी हो जाती हैं इस कमी कोऋणात्मक वृद्धि कहते हैं और ऋणात्मक वृद्धि की दर कोअवमूल्यन की दर (घाटे की दर) कहते हैं। अवमूल्यन के परिणामस्वरूप वस्तु के मूल्य में होने वाली कमी कोसमयानुसार चक्रवृद्धि के रूप में संयोजित करते हैं। आइए अब हम इसे सूत्र के माध्यम से समझें।

याfद किसी वस्तु का वर्तमान मूल्य ` झ् है तथा मूल्य में वार्षिक घाटे की (अवमूल्यन) दर r³ है तो ह वर्ष के बाद उसके मूल्य A की गणना के लिए सूत्र में r के स्थान पर – r रखते हुए सूत्र कोनिम्नवत् प्रतिस्थापित करते हैं

२२०५.ज्हु

२२१०.ज्हु

इस कोसमझने के लिए उदाहरण १० कोदेखिए

उदाहरण १०. स्वूâटर के मूल्य में प्रत्येक वर्ष १०ज़् का अवमूल्यन होता है। याfद स्वूâटर का वर्तमान मूल्य ` २५००० हो तो ३ वर्ष बाद इसका कितना मूल्य हो जाएगा ?

हल: स्वूâटर का वर्तमान मूल्य (झ्) ृ ` २५०००

अवमूल्यन की दर rज़् ृ १०ज़्

अतः वृद्धि दर ़ -rज्ञ्
़ -१०ज्ञ्
अतः r ़ -१०
समय (ह) ़ ३ वर्ष
मान लिया ३ वर्ष बाद स्वूâटर का मूल्य ़ ` A
A ़ झ् २२१६.ज्हु
़ २५००० २२२१.ज्हु (क्योंकि यहाँ r का मान ऋणात्मक है।)
़ २५००० २२२६.ज्हु
़ २५००० २२३१.ज्हु
़ २५००० २२३६.ज्हु२२४१.ज्हु
२२४६.ज्हु
़ ` १८२२५
अतः ३ वर्ष पश्चात् स्वूâटर का मूल्य ` १८,२२५ होगा।
संकेत: अवमूल्यन अथवा कमी या घाटे की दर rज्ञ् के स्थान पर वृध्दि को -rज्ञ् से व्यक्त करते हैं।
अतः अवमूल्यन के लिए सूत्र निम्नलिखित ढंग से लिखा जा सकता है :
A ़ झ् २२५१.ज्हु
उदाहरण ११. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष ५ज्ञ् की दर से कम हो रही है। याfद गाँव की वर्तमान जनसंख्या ३६१० हो, तो २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या बताइए ।
हल: गाँव की वर्तमान जनसंख्या A ़ ३६१०
प्रतिवर्ष कमी की दर rज्ञ् · ५ज्ञ्
समय (ह) ़ २ वर्ष
मान लिया २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ़ झ्
A ़ झ् २२५६.ज्हु
या, ३६१० ़ झ् २२६१.ज्हु
़ झ् २२६६.ज्हु
या, झ् २२७२.ज्हु
या, झ्२२७७.ज्हु
़ २२८२.ज्हु
़ ४०००
अतः २ वर्ष पूर्व की गाँव की जनसंख्या ४००० थी ।
वैकल्पिक विधि
गाँव की वर्तमान जनसंख्या झ् ़ ३६१०

प्रतिवर्ष कमी की दर ¸ rज्ञ्
अर्थात् वृद्धि की दर ¸ - rज्ञ्
प्रश्नानुसार - rज्ञ् ¸ ५ज्ञ्
अत: r ¸ -५
समय २ वर्ष पूर्व अर्थात् ह ¸ -२
अत: याfद २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या A हो तो,
घ्स्a्ा१५९६.ऊघ्इ
२२८७.ज्हु
¸ झ् २२९२.ज्हु
¸ ३६१० २२९७.ज्हु
२३०२.ज्हु
२३०७.ज्हु
२३१२.ज्हु
¸ २३१७.ज्हु
¸ २३२३.ज्हु
२३२८.ज्हु
अत: २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ४००० थी ।
उदाहरण १२. रामू ने एक पुरानी नाव ` १०८३० में खरीदी। याfद नाव का अवमूल्यन ५ज्ञ् वार्षिक की दर से हुआ हो, तो उस नाव का २ वर्ष पूर्व मूल्य कितना था ?
हल: नाव का वर्तमान मूल्य (A) ¸ ` १०८३०
अवमूल्यन की प्रतिशत वार्षिक दर (– r) · – ५
समय वर्ष (ह) ¸ २ वर्ष
नाव का २ वर्ष पूर्व का मूल्य (झ्) ज्ञात किया जाना है।
यहाँ सूत्र A ¸ झ्२३३३.ज्हुसे
१०८३० ¸ झ्२३३८.ज्हु
¸ झ्२३४३.ज्हु
इसलिए झ् ¸ २३४८.ज्हु
¸ १२०००
अत: २ वर्ष पूर्व नाव का मूल्य ¸ ` १२०००
वैकल्पिक विधि :
नाव का वर्तमान मूल्य (झ्) ¸ ` १०८३०
अवमूल्यन की प्रतिशत वार्षिक दर (– r) ¸ – ५
२ वर्ष पूर्व का समय (ह) ¸ -२

नाव का २ वर्ष पूर्व का मूल्य (A) ज्ञात किया जाना है ।
यहाँ सूत्र A ़ झ्२३५३.ज्हुसे
A ़ १०८३० २३५८.ज्हु
़ १०८३० २३६३.ज्हु
२३६८.ज्हु
२३७४.ज्हु
़ १०८३० २३७९.ज्हु
़ १२०००
अत: २ वर्ष पूर्व नाव का मूल्य ़ ` १२०००
 प्रयास कीजिए :

१ एक गाँव की जनसंख्या में ५ज्ञ् प्रतिवर्ष की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्तमान जनसंख्या ४४१० हो तो २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।
२ एक मोटर साइकिल के मूल्य में प्रत्येक वर्ष ५ज्ञ् का अवमूल्यन होता है। याfद
वर्तमान मूल्य ` ४०,००० की हो तो २ वर्ष बाद इसका मूल्य क्या होगा?
उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि
१. याfद r वृद्धि की वार्षिक दर हो, तो
A ़ झ्२३८४.ज्हुयहाँ A अन्तिम मान, झ् प्रारम्भिक मान, ह ़ समय-अवधि वर्षों में
२. याfद वृद्धि की दर ऋणात्मक अर्थात् अवमूल्यन की दर हो, तो
A ़ झ् २३८९.ज्हु यहाँ A अन्तिम मान, झ् प्रारम्भिक मान,
ह ़ समय-अवधि वर्ष में
अभ्यास ११ (ं)

१. एक नगर की जनसंख्या ३१ दिसम्बर १९७८ को १००००० थी । याfद जनसंख्या में वृद्धि दर १०ज्ञ् वार्षिक हो, तो ३१ दिसम्बर १९८१ कोउस नगर की जनसंख्या कितनी होगी?
२. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष ५ज्ञ् बढ़ जाती है । याfद इस समय उस गाँव की जनसंख्या ४४१० हो, तो २ वर्ष पूर्व उस गाँव की जनसंख्या कितनी थी ?
३. किसी क्षेत्र की जनसंख्या में २३९४.ज्हुज्ञ् वृद्धि प्रति वर्ष हो रही है । ३ वर्ष बाद वहाँ की जनसंख्या कितनी होगी याfद वहाँ की वर्तमान जनसंख्या ३३७५० है ?

४. किसी मशीन के मूल्य में १२ज्ञ् वार्षिक दर से अवमूल्यन होता है । याfद मशीन का वर्तमान मूल्य २९०४० रुपये हो तो २ वर्ष पूर्व इसका कितना मूल्य था ?

५. कितने समय में एक पुराने ट्रैक्टर की कीमत १००,००० रुपये से घटकर ८१,००० रुपये रह जायेगी याfद उसकी अवमूल्यन दर १०ज्ञ् वार्षिक है ?

६. एक प्रकार के जीवाणु ५ज्ञ् प्रति घंटे की दर से बढ़ रहे हैं । याfद प्रातः ९ बजे जीवाणुओं की संख्या २५०००००० रही हो तो १२ बजे मध्याह्न कितने जीवाणु होंगे ?

७. एक रंगीन टेलीविजन सेट का मूल्य १५६२५ रुपये हैं याfद उसका मूल्य प्रतिवर्ष ८ज्ञ् घटता है तो ३ वर्ष के बाद उसके मूल्य में कुल कितनी गिरावट आएगी ?

८. किसी देश की जनसंख्या इस समय ५३ करोड़ है । याfद यह ५ज्ञ् वार्षिक की दर से बढ़े तो ज्ञात कीजिए कि २ वर्ष बाद इसमें कुल कितनी वृद्धि होगी ?

९. ाIqकस वार्षिक दर से अवमूल्यन होने पर एक वंâपनी की वर्तमान पूंजी ६२,५०,००,००० रुपये से घटकर २ वर्ष बाद ५७,६०,००,००० रुपये रह जायेगी ?

सामूहिक चर्चा कीजिए

१. २३९९.ज्हु वर्ष में कितनी तिमाहियाँ होंगी?

२. ५ अर्ध वर्ष कितने वर्ष के बराबर होगा ?

३. सूत्र A ृ झ्२४०४.ज्हु में r वृद्धि की दर है या घटने की दर ?

४. १८ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर कोतिमाही ब्याज की प्रतिशत दर में रूपान्तरण कीजिए।

५. अवमूल्यन की दशा में प्रारम्भिक पूँजी और अंतिम पूँजी में कौन बड़ी होती है ?

दक्षता अभ्यास - ११

१. राकेश की २ वर्ष पुरानी साइकिल को, जो उसने रु. १६०० में खरीदी थी, मोहन ने रु. १२९६ में खरीद ली । साइकिल के मूल्य का किस दर से अवमूल्यन हुआ ?

२. किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या १००००० है । याfद रोजगार की उपलब्धता के कारण जनसंख्या १०ज्ञ् वार्षिक दर से बढ़े, तो ३ वर्ष बाद नगर की जनसंख्या कितनी होगी ?

३. एक ग्राम पंचायत क्षेत्र में पशुओं की संख्या में २४०९.ज्हुज्ञ् की दर से कमी हो रही है । याfद वर्तमान में पशुओं की संख्या ६४०० हो तो २ वर्ष बाद क्षेत्र में कितने पशुओं की कमी हो जायेगी ?

४. रु. ४०९६० का २४१४.ज्हुज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २४१९.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज छमाही संयोजित होता है ।

५. याfद मूलधन · १०००० रुपये, ब्याज की दर · २४ज्ञ् वार्षिक, समय ·२ माह तथा ब्याज मासिक देय हो, तो चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए ।

डसंकेत : २४ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर · २ज्ञ् मासिक ब्याज की दर ़

६. याfद ६२५०० रुपये का २४२५.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ७८०४ रुपये हो, जबकि ब्याज छमाही संयोजित किया जाता है, तो वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ।

७. कितने समय में ८ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २५०००० रुपये का चक्रवृद्धि ाqमश्रधन २६५३०२ रुपये हो जायेगा, जब कि ब्याज तिमाही संयोजित किया जाना है।

८. ३०³ तथा २०³ के क्रमिक बट्टों के समतुल्य बट्टा है

(क) ५०³ (ख) ४६³ (ग) ४४³ (घ) ३०³

९. रु. १००० का १०³ वार्षिक ब्याज की दर से २ वर्षों के चक्रवृद्धि और सरल ब्याजों का अन्तर होगा। (२००५)

(क) रु. १०.०० (ख) रु. ११.००

(ग) रु. १११०.०० (घ) रु. १००.००

१०. याfद किसी धनराशि का ५³ प्रतिवर्ष की ब्याज की दर से दो वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज १२३.०० रुपये हो तो मूलधन है : (२००६)

(क) रु. १,०००.०० (ख) रु. १,१००

(ग) रु. १,२०० (घ) रु. १,३००

११. एक व्याfक्त ने बैंक में ६,००० रुपये ५³ वार्षिक साधारण ब्याज की दर से जमा किये। एक अन्य व्याfक्त ने ५००० रुपये ८³ वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जमा किये दो वर्ष बाद उनके ब्याजों का अन्तर होगा : (२००७)

(क) रु. २३० (ख) रु. २३२

(ग) रु. ८३२ (घ) रु. ६००

हमने क्या चर्चा की ?

१. मूलधन ृ झ्, rज़् ृ वार्षिक दर, ह ृ समय, A ृ मिश्रधन, इन चारों में किसी एक का मान ज्ञात करने के लिए सूत्र २४३०.ज्हु का प्रयोग किया जाना चाहिए।
२. ब्याज दर का संयोजन मासिक, त्रैमासिक (तिमाही) षट्मासिक (छमाही) भी किया जाता है।
३. याfद ब्याज छमाही देय हो तो, वर्षों में दी गई अवधि में २ से गुणा करके उसे छमाही में बदल देते हैं तथा वार्षिक ब्याजदर में २ से भाग करके छमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं।
४. याfद ब्याज तिमाही देय हो तो वर्षों में दी गई अवधि में ४ से गुणा करके उस अवधि कोतिमाही में बदल देते हैं तथा वार्षिक दर प्रतिशत में ४ से भाग करके तिमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं।
५. रूपान्तरण वह समयावधि है जिसके लिए प्रत्येक ब्याज कोमूलधन में जोड़ कर नया मूलधन ज्ञात कर लेते हैं।
६. कोई जनसंख्या जो वर्तमान में है बढ़ कर वर्तमान से अधिक हो जाती है उसे धनात्मक वृद्धि या बढ़त कहते हैं। कभी-कभी समय के बढ़ने से मान कम हो जाता है। इसे ऋणात्मक वृद्धि या अवमूल्यन कहते हैं। ध्यान दें मशीने गाड़ियाँ पुरानी हो जाती हैं तो उनके मूल्य में कमी आ जाती है। अवमूल्यन कोघाटे की दर भी कहते हैं।
७. वृद्धि की दर में बढ़ोत्तरी होने पर या वृद्धि धनात्मक होने पर पूर्व वर्षों के मान के लिए समय कोऋणात्मक मान कर मान निकालना चाहिए। इसके लिए २४३५.ज्हुका प्रयोग करना चाहिए।
८. अवमूल्यन की स्थिति में समय और घटने की दर दोनों कोऋणात्मक मानकर पूर्व वर्षों के लिए सूत्र का प्रयोग २४४०.ज्हुके रूप में करते हैं।

१६०४.ज्हु

१६०८.ज्हु

□

□

ष्टाझ्ज्ञ् ½झ्झ्°झ्झ्

अभ्यास ११ (a)

१. (ं); २. (म्) २ज़्; ३. (a) २५६०.ज्हु(झ्), (ं) २५६५.ज्हु(श्), (म्) २५७०.ज्हु(N), (ृ) २५७५.ज्हु(R); ४. २१ रुपये; ५. शून्य; ६. ३ज़् प्रति तिमाही; ७. ३१५.२५ रुपये; ८. २ वर्ष; ९. २५२२ रुपये; १०. १२६१ रुपये; ११. ३२५ रुपये; १२. २०ज़् वार्षिक ब्याज दर; १३. १वर्ष ।

अभ्यास ११ (ं)

१. १३३१००; २. ४०००; ३. ४०९६०; ४. ३७५०० रुपये; ५. २ वर्ष; ६. २८९४०६२५ जीवाणु ; ७. ३४५८ रुपये;

८. ५४३२५०००; ९. ८ज्ञ् वार्षिक ।

दक्षता अभ्यास - ११

१. १०ज्ञ् वार्षिक; २. १३३१००; ३. ३१६ पशु; ४. ८१७० रुपये; ५. ४०४ रुपये; ६. ८ज्ञ्; ७. ९ माह या २५८०.ज्हु वर्ष।, ८. (ग), ९. ८. १९८६.ज्हुज्ञ् वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कितने वर्ष में ` ६४० का मिश्रधन ` ८१० हो जायेगा?

९. ` १६,००० का ५ज्ञ् प्रति छमाही ब्याज की दर से १९९१.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

१०. ` ८००० का १०ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से १९९६.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज प्रति छमाही लगाया जाता है ।

११. ` ५१२० का १२.५ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २००१.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज बताइए जबकि ब्याज प्रति तिमाही देय है ।

१२. किस ब्याज की दर से ` ४००० पर ९ माह में ६३०.५० रुपये चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा याfद ब्याज प्रति तिमाही संयोजित होता है ?

१३. कितने समय में १०ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से ` १२००० पर ` १२३० चक्रवृद्धि ब्याज मिलेगा याfद ब्याज प्रति छमाही संयोजित होता है?

११.३ वस्तुओं के मूल्य में वृद्धि एवं घाटे की दर

हम अपने दैनिक जीवन में देखते हैं कि पौधे बढ़कर वृक्ष, बच्चे बढ़कर किशोर और फिर युवक हो जाते हैं। गत वर्ष की जनसंख्या बढ़कर वर्तमान वर्ष में और अधिक हो जाती है। जनसंख्या की यह बढ़त चक्रवृद्धि ब्याज की भाँति होती है। इस तरह की वृद्धि को 'धनात्मक वृद्धि' कहते हैं। इसका अर्थ है कि समय के बढ़ने से मान भी चक्रवृद्धि के रूप में बढ़ता है। इस दशा मे चक्रवृद्धि मिश्रधन के सूत्र में मूलधन के स्थान पर प्रारम्भिक मूल्य, जनसंख्या इत्यादि, दर के स्थान पर प्रतिवर्ष की वृद्धि दर और समय के स्थान पर दी गई अवधि कोरख कर अन्तिम या निर्धारित वर्ष का मूल्य या जनसंख्या इत्यादि ज्ञात कर लेते हैं। पुनः निर्धारित अवधि में वृद्धि को, अन्तिम स्थिति में से प्रारम्भिक स्थिति के मान कोघटाकर ज्ञात कर लेते हैं। जैसा कि आगे दिये गये उदाहरणों से स्पष्ट है।

याfद किसी वस्तु का वर्तमान मूल्य रु. झ् हो तथा मूल्य में वार्षिक वृद्धि दर २००७.ज्हु³ हो तो ह वर्ष उपरान्त उसके मूल्य A की गणना के लिए

सूत्र कोनिम्न प्रकार से प्रतिपादित करते हैं।
प्रथम वर्ष पश्चात् मूल्य ृ झ् २०१२.ज्हु
द्वितीय वर्ष पश्चात् मूल्य ृ झ् २०१७.ज्हु
ह वर्ष पश्चात् मूल्य ृ झ् २०२२.ज्हु
अत: A ृ झ् २०२७.ज्हु
उदाहरण ६. एक नगर क्षेत्र की जनसंख्या में ५ज्ञ् प्रतिवर्ष की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्तमान जनसंख्या १२००० हो तो दो वर्ष बाद जनसंख्या कितनी होगी ?
हल: वर्तमान जनसंख्या · १२००० · झ्
समय (ह) · २ वर्ष
r (प्रतिशत प्रतिवर्ष वृद्धि दर) ृ ५
मान लिया २ वर्ष बाद जनसंख्या ृ A
A ृ झ् २०३२.ज्हु में मान प्रतिस्थापित करने पर
अत: A ृ १२००० २०३७.ज्हु
ृ १२००० २०४२.ज्हु २०४७.ज्हु
ृ १३२३०
अत: २ वर्ष पश्चात् नगर क्षेत्र की जनसंख्या १३,२३० होगी।
उदाहरण ७. एक शहर की जनसंख्या १०००००० से बढ़कर तीन वर्ष में ११५७६२५ हो जाती है। वार्षिक वृद्धि की
दर ज्ञात कीजिए ।
हल: प्रश्नानुसार
शहर की वर्तमान जनसंख्या ृ १०००००० ृ झ्
बढ़कर तीन वर्ष में हुई जनसंख्या ृ ११५७६२५ ृ A
वृद्धि की दर प्रतिशत प्रतिवर्ष ृ r
समय-अवधि वर्ष में ृ ३ ृ ह
अत: A ृ झ् २०५२.ज्हु में मान प्रतिस्थापित करने पर,
या, ११५७६२५ ृ १०००००० २०५८.ज्हु
या, १०००००० २०६३.ज्हु ृ ११५७६२५
या, २०६८.ज्हु २०७३.ज्हु
या, २०७८.ज्हु २०८३.ज्हु
या, २०८८.ज्हु २०९३.ज्हु
या, २०९८.ज्हु ृ २१०३.ज्हु-१
ृ २१०९.ज्हु
या r ृ ५

वार्षिक वृद्धि दर ़ ५ ज्ञ्
उदाहरण ८. एक साइकिल बनाने वाली कम्पनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष ५ज्ञ्की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्ष २००० में उत्पादन ४०,००० हो तो वर्ष २००२ में कितना उत्पादन होगा ?
हलः साइकिलों की संख्या जो वर्तमान वर्ष में बनी (झ्) ़ ४०,०००
प्रतिशत वृद्धि की दर प्रतिवर्ष (r) ़ ५
समय (ह) ़ २ वर्ष
मान लिया २ वर्ष बाद साइकिलों की संख्या ़ A
तो A ़ झ् २११४.ज्हु
२११९.ज्हु २१२४.ज्हु
२१२९.ज्हु २१३४.ज्हु
२१३९.ज्हु२१४४.ज्हु
२१४९.ज्हु२१५४.ज्हु
२१५९.ज्हु
अतः वर्ष २००२ में ४४,१०० साइकिलों का उत्पादन होगा ।
उदाहरण ९. एक कार बनाने वाली कम्पनी के उत्पादन में प्रतिवर्ष १०ज्ञ् की वृद्धि होती है। याfद वर्तमान में उत्पादन ६०००० कार वार्षिक हो, तो कितने वर्षों बाद उत्पादन ७९८६० कार वार्षिक हो जायेगा ?
हलः
कारों का वर्तमान उत्पादन प्रतिवर्ष (झ्) ़ ६००००
प्रतिशत वृद्धि की दर प्रतिवर्ष (r) ़ १०
माना ह वर्षों बाद उत्पादन प्रतिवर्ष (A) ़ ७९८६०
सूत्र : A ़ झ् २१६५.ज्हु
७९८६० ़ ६०००० २१७०.ज्हु
़ ६०००० २१७५.ज्हु
२१८०.ज्हु २१८५.ज्हु
२१९०.ज्हु
२१९५.ज्हु
अर्थात्   २२००.ज्हु
अतः ३ वर्षों बाद उत्पादन ७९८६० कार प्रतिवर्ष हो जायेगा।
११.३.१   मूल्य में घाटे (कमी) की दर अथवा अवमूल्यन की दर
हम देखते हैं कभी-कभी समय के बढ़ने के साथ-साथ वस्तुओं के मूल्यों में कमी हो जाती है। यथा मशीन, स्वूâटर, कार या अन्य सम्पत्तियाँ जब पुरानी हो जाती हैं, तो उनके मूल्य में कमी हो जाती हैं इस कमी

कोऋणात्मक वृद्धि कहते हैं और ऋणात्मक वृद्धि की दर कोअवमूल्यन की दर (घाटे की दर) कहते हैं। अवमूल्यन के परिणामस्वरूप वस्तु के मूल्य में होने वाली कमी कोसमयानुसार चक्रवृद्धि के रूप में संयोजित करते हैं। आइए अब हम इसे सूत्र के माध्यम से समझें।

यादि किसी वस्तु का वर्तमान मूल्य ` झ् है तथा मूल्य में वार्षिक घाटे की (अवमूल्यन) दर r³ है तो ह वर्ष के बाद उसके मूल्य A की गणना के लिए सूत्र में r के स्थान पर – r रखते हुए सूत्र कोनिम्नवत् प्रतिस्थापित करते हैं

२२०५.ज्हु

२२१०.ज्हु

इस कोसमझने के लिए उदाहरण १० कोदेखिए

उदाहरण १०. स्वूâटर के मूल्य में प्रत्येक वर्ष १०ज्ञ् का अवमूल्यन होता है। यादि स्वूâटर का वर्तमान मूल्य ` २५००० हो तो ३ वर्ष बाद इसका कितना मूल्य हो जाएगा ?

हल: स्वूâटर का वर्तमान मूल्य (झ्) ़ ` २५०००

अवमूल्यन की दर rज्ञ् ़ १०ज्ञ्

अत: वृद्धि दर ़ -rज्ञ्

़ -१०ज्ञ्

अत: r ़ -१०

समय (ह) ़ ३ वर्ष

मान लिया ३ वर्ष बाद स्वूâटर का मूल्य ़ ` A

A ़ झ् २२१६.ज्हु

़ २५००० २२२१.ज्हु (क्योंकि यहाँ r का मान ऋणात्मक है।)

़ २५००० २२२६.ज्हु

़ २५००० २२३१.ज्हु

़ २५००० २२३६.ज्हु२२४१.ज्हु

२२४६.ज्हु

़ ` १८२२५

अत: ३ वर्ष पश्चात् स्वूâटर का मूल्य ` १८,२२५ होगा।

संकेत: अवमूल्यन अथवा कमी या घाटे की दर rज्ञ् के स्थान पर वृध्दि को - rज्ञ् से व्यक्त करते हैं।

अत: अवमूल्यन के लिए सूत्र निम्नलिखित ढंग से लिखा जा सकता है :

A ़ झ् २२५१.ज्हु

उदाहरण ११. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष ५ज्ञ् की दर से कम हो रही है। याfद गाँव की वर्तमान जनसंख्या ३६१० हो, तो २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या बताइए ।

हलः गाँव की वर्तमान जनसंख्या A ृ ३६१०

प्रतिवर्ष कमी की दर rज्ञ् · ५ज्ञ्

समय (ह) ृ २ वर्ष

मान लिया २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ृ झ्

A ृ झ् २२५६.ज्हु

या, ३६१० ृ झ् २२६१.ज्हु

ृ झ् २२६६.ज्हु

या,   झ् २२७२.ज्हु

या, झ्२२७७.ज्हु

ृ २२८२.ज्हु

ृ ४०००

अतः २ वर्ष पूर्व की गाँव की जनसंख्या ४००० थी ।

वैकल्पिक विधि

गाँव की वर्तमान जनसंख्या झ् ृ ३६१०

प्रतिवर्ष कमी की दर ृ rज्ञ्

अर्थात् वृद्धि की दर ृ - rज्ञ्

प्रश्नानुसार - rज्ञ् ृ ५ज्ञ्

अतः r ृ -५

समय २ वर्ष पूर्व अर्थात् ह ृ -२

अतः याfद २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या A हो तो,

घ्स्aृl१५९६.ऊघ्इ

२२८७.ज्हु

ृ झ् २२९२.ज्हु

ृ ३६१० २२९७.ज्हु

२३०२.ज्हु

२३०७.ज्हु

२३१२.ज्हु

ृ २३१७.ज्हु

ृ २३२३.ज्हु

२३२८.ज्हु

अतः २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ४००० थी ।

उदाहरण १२. रामू ने एक पुरानी नाव ` १०८३० में खरीदी। याfद नाव का अवमूल्यन ५ज्ञ् वार्षिक की दर से हुआ हो, तो उस नाव का २ वर्ष पूर्व मूल्य कितना था ?

हलः नाव का वर्तमान मूल्य (A) ृ ` १०८३०

अवमूल्यन की प्रतिशत वार्षिक दर (– r) · – ५

समय वर्ष (ह) ृ २ वर्ष

नाव का २ वर्ष पूर्व का मूल्य (झ्) ज्ञात किया जाना है।

यहाँ सूत्र A ृ झ्२३३३.ज्हुसे

१०८३० ृ झ्२३३८.ज्हु

ृ झ्२३४३.ज्हु

इसलिए झ् ृ २३४८.ज्हु

ृ १२०००

अतः २ वर्ष पूर्व नाव का मूल्य ृ ` १२०००

वैकल्पिक विधि :

नाव का वर्तमान मूल्य (झ्) ृ ` १०८३०

अवमूल्यन की प्रतिशत वार्षिक दर (– r) ृ – ५

२ वर्ष पूर्व का समय (ह) ृ -२

नाव का २ वर्ष पूर्व का मूल्य (A) ज्ञात किया जाना है ।

यहाँ सूत्र A ृ झ्२३५३.ज्हुसे

A ृ १०८३० २३५८.ज्हु

ृ १०८३० २३६३.ज्हु

२३६८.ज्हु

२३७४.ज्हु

ृ १०८३० २३७९.ज्हु

ृ १२०००

अतः २ वर्ष पूर्व नाव का मूल्य ृ ` १२०००

 प्रयास कीजिए :

१ एक गाँव की जनसंख्या में ५ज्ञ् प्रतिवर्ष की दर से वृद्धि होती है। याfद वर्तमान जनसंख्या ४४१० हो तो २ वर्ष पूर्व की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

२ एक मोटर साइकिल के मूल्य में प्रत्येक वर्ष ५ज्ञ् का अवमूल्यन होता है। याfद
वर्तमान मूल्य ` ४०,००० की हो तो २ वर्ष बाद इसका मूल्य क्या होगा?

उपर्युक्त उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

१. याfद r वृद्धि की वार्षिक दर हो, तो
A ृ झ्२३८४.ज्हुयहाँ A अन्तिम मान, झ् प्रारम्भिक मान, ह ृ समय-अवधि
वर्षों में
२. याfद वृद्धि की दर ऋणात्मक अर्थात् अवमूल्यन की दर हो, तो
A ृ झ् २३८९.ज्हु यहाँ A अन्तिम मान, झ् प्रारम्भिक मान,
ह ृ समय-अवधि वर्ष में
अभ्यास ११ (ं)

१. एक नगर की जनसंख्या ३१ दिसम्बर १९७८ को १००००० थी । याfद जनसंख्या में वृद्धि दर १०ज्ञ् वार्षिक हो, तो ३१ दिसम्बर १९८१ कोउस नगर की जनसंख्या कितनी होगी?
२. एक गाँव की जनसंख्या प्रतिवर्ष ५ज्ञ् बढ़ जाती है । याfद इस समय उस गाँव की जनसंख्या ४४१० हो, तो २ वर्ष पूर्व उस गाँव की जनसंख्या कितनी थी ?
३. किसी क्षेत्र की जनसंख्या में २३९४.ज्हुज्ञ् वृद्धि प्रति वर्ष हो रही है । ३ वर्ष बाद वहाँ की जनसंख्या कितनी होगी याfद वहाँ की वर्तमान जनसंख्या ३३७५० है ?
४. किसी मशीन के मूल्य में १२ज्ञ् वार्षिक दर से अवमूल्यन होता है । याfद मशीन का वर्तमान मूल्य २९०४० रुपये हो तो २ वर्ष पूर्व इसका कितना मूल्य था ?
५. कितने समय में एक पुराने ट्रैक्टर की कीमत १००,००० रुपये से घटकर ८१,००० रुपये रह जायेगी याfद उसकी अवमूल्यन दर १०ज्ञ् वार्षिक है ?
६. एक प्रकार के जीवाणु ५ज्ञ् प्रति घंटे की दर से बढ़ रहे हैं । याfद प्रातः ९ बजे जीवाणुओं की संख्या २५०००००० रही हो तो १२ बजे मध्याह्न कितने जीवाणु होंगे ?
७. एक रंगीन टेलीविजन सेट का मूल्य १५६२५ रुपये हैं याfद उसका मूल्य प्रतिवर्ष ८ज्ञ् घटता है तो ३ वर्ष के बाद उसके मूल्य में कुल कितनी गिरावट आएगी ?
८. किसी देश की जनसंख्या इस समय ५३ करोड़ है । याfद यह ५ज्ञ् वार्षिक की दर से बढ़े तो ज्ञात कीजिए कि २ वर्ष बाद इसमें कुल कितनी वृद्धि होगी ?
९. ाIqकस वार्षिक दर से अवमूल्यन होने पर एक वंâपनी की वर्तमान पूंजी ६२,५०,००,००० रुपये से घटकर २ वर्ष बाद ५७,६०,००,०००

रुपये रह जायेगी ?

सामूहिक चर्चा कीजिए

१. २३९९.ज्हु वर्ष में कितनी तिमाहियाँ होंगी?
२. ५ अर्ध वर्ष कितने वर्ष के बराबर होगा ?
३. सूत्र A ृ झ्२४०४.ज्हु में r वृद्धि की दर है या घटने की दर ?
४. १८ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर कोतिमाही ब्याज की प्रतिशत दर में रूपान्तरण कीजिए।
५. अवमूल्यन की दशा में प्रारम्भिक पूँजी और अंतिम पूँजी में कौन बड़ी होती है ?

दक्षता अभ्यास - ११

१. राकेश की २ वर्ष पुरानी साइकिल को, जो उसने रु. १६०० में खरीदी थी, मोहन ने रु. १२९६ में खरीद ली । साइकिल के मूल्य का किस दर से अवमूल्यन हुआ ?
२. किसी नगर की वर्तमान जनसंख्या १००००० है । याfद रोजगार की उपलब्धता के कारण जनसंख्या १०ज्ञ् वार्षिक दर से बढ़े, तो ३ वर्ष बाद नगर की जनसंख्या कितनी होगी ?
३. एक ग्राम पंचायत क्षेत्र में पशुओं की संख्या में २४०९.ज्हुज्ञ् की दर से कमी हो रही है । याfद वर्तमान में पशुओं की संख्या ६४०० हो तो २ वर्ष बाद क्षेत्र में कितने पशुओं की कमी हो जायेगी ?
४. रु. ४०९६० का २४१४.ज्हुज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २४१९.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए, जबकि ब्याज छमाही संयोजित होता है ।
५. याfद मूलधन · १०००० रुपये, ब्याज की दर · २४ज्ञ् वार्षिक, समय ·२ माह तथा ब्याज मासिक देय हो, तो चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए ।

डसंकेत : २४ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर · २ज्ञ् मासिक ब्याज की दर ़

६. याfद ६२५०० रुपये का २४२५.ज्हु वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ७८०४ रुपये हो, जबकि ब्याज छमाही संयोजित किया जाता है, तो वार्षिक ब्याज की दर ज्ञात कीजिए ।
७. कितने समय में ८ज्ञ् वार्षिक ब्याज की दर से २५०००० रुपये का चक्रवृद्धि ाIqमश्रधन २६५३०२ रुपये हो जायेगा, जब कि ब्याज तिमाही संयोजित किया जाना है।
८. ३०³ तथा २०³ के क्रमिक बट्टों के समतुल्य बट्टा है

(क) ५०^3 (ख) ४६^3 (ग) ४४^3 (घ) ३०^3

९. रु. १००० का १०^3 वार्षिक ब्याज की दर से २ वर्षों के चक्रवृद्धि और सरल ब्याजों का अन्तर होगा। (२००५)

(क) रु. १०.०० (ख) रु. ११.००

(ग) रु. १११०.०० (घ) रु. १००.००

१०. याfद किसी धनराशि का ५^3 प्रतिवर्ष की ब्याज की दर से दो वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज १२३.०० रुपये हो तो मूलधन है : (२००६)

(क) रु. १,०००.०० (ख) रु. १,१००

(ग) रु. १,२०० (घ) रु. १,३००

११. एक व्याfक्त ने बैंक में ६,००० रुपये ५^3 वार्षिक साधारण ब्याज की दर से जमा किये। एक अन्य व्याfक्त ने ५००० रुपये ८^3 वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से जमा किये दो वर्ष बाद उनके ब्याजों का अन्तर होगा : (२००७)

(क) रु. २३० (ख) रु. २३२

(ग) रु. ८३२ (घ) रु. ६००

हमने क्या चर्चा की ?

१. मूलधन ृ झ्, rज्ञ् ृ वार्षिक दर, ह ृ समय, A ृ मिश्रधन, इन चारों में किसी एक का मान ज्ञात करने के लिए सूत्र २४३०.ज्हु का प्रयोग किया जाना चाहिए।

२. ब्याज दर का संयोजन मासिक, त्रैमासिक (तिमाही) षट्मासिक (छमाही) भी किया जाता है।

३. याfद ब्याज छमाही देय हो तो, वर्षों में दी गई अवधि में २ से गुणा करके उसे छमाही में बदल देते हैं तथा वार्षिक ब्याजदर में २ से भाग करके छमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं।

४. याfद ब्याज तिमाही देय हो तो वर्षों में दी गई अवधि में ४ से गुणा करके उस अवधि कोतिमाही में बदल देते हैं तथा वार्षिक दर प्रतिशत में ४ से भाग करके तिमाही ब्याज दर ज्ञात कर लेते हैं।

५. रूपान्तरण वह समयावधि है जिसके लिए प्रत्येक ब्याज कोमूलधन में जोड़ कर नया मूलधन ज्ञात कर लेते हैं।

६. कोई जनसंख्या जो वर्तमान में है बढ़ कर वर्तमान से अधिक हो जाती है उसे धनात्मक वृद्धि या बढ़त कहते हैं। कभी-कभी समय के बढ़ने से मान कम हो जाता है। इसे ऋणात्मक वृद्धि या अवमूल्यन कहते हैं। ध्यान दें मशीने गाड़ियाँ पुरानी हो जाती हैं तो उनके मूल्य में कमी आ जाती है। अवमूल्यन कोघाटे की दर भी कहते हैं।

७. वृद्धि की दर में बढ़ोत्तरी होने पर या वृद्धि धनात्मक होने पर पूर्व वर्षों के मान के लिए समय कोऋणात्मक मान कर मान निकालना चाहिए। इसके लिए २४३५.ज्हुका प्रयोग करना चाहिए।

८. अवमूल्यन की स्थिति में समय और घटने की दर दोनों कोऋणात्मक मानकर पूर्व वर्षों के लिए सूत्र का प्रयोग २४४०.ज्हुके रूप में करते हैं।

१६०४.ज्हु

१६०८.ज्हु

□

□

ष्टाझ्ज्ञ् ½झ्झ्°झ्झ्

अभ्यास ११ (a)

१. (ं); २. (म्) २ज्ञ्; ३. (a) २५६०.ज्हु(झ्), (ं) २५६५.ज्हु(श्), (म्) २५७०.ज्हु(N), (ृ) २५७५.ज्हु(R); ४. २१ रुपये; ५. शून्य; ६. ३ज्ञ् प्रति तिमाही; ७. ३१५.२५ रुपये; ८. २ वर्ष; ९. २५२२ रुपये; १०. १२६१ रुपये; ११. ३२५ रुपये; १२. २०ज्ञ् वार्षिक ब्याज दर; १३. १वर्ष ।

अभ्यास ११ (ं)

१. १३३१००; २. ४०००; ३. ४०९६०; ४. ३७५०० रुपये; ५. २ वर्ष; ६. २८९४०६२५ जीवाणु ; ७. ३४५८ रुपये;

८. ५४३२५०००; ९. ८ज्ञ् वार्षिक ।

दक्षता अभ्यास - ११

१. १०ज्ञ् वार्षिक; २. १३३१००; ३. ३१६ पशु; ४. ८१७० रुपये; ५. ४०४ रुपये; ६. ८ज्ञ्; ७. ९ माह या २५८०.ज्हु वर्ष।, ८. (ग), ९. (क), १०. (ग), ११. (ख)(क), १०. (ग), ११. (ख)

इकाई - 12बैंविंâग

- बैंक की जानकारी
- बैंक में खाता खोलना एवं खाता के प्रकार
- बैंक ड्राफ्ट, लॉकर
- चेक एवं चेक के प्रकार
- बचत खाते की पास बुक में प्रविष्टियों के आधार पर ब्याज की गणना
- शेयर और लाभांश की जानकारी
- शेयरों की खरीद एवं बिक्री
- लाभ और लाभांश का वितरण
- दलाल और दलाली
- ऋण-पत्र

12.1 भूमिका

आज हम प्रगतिशील युग से गुजर रहे हैं। चारों ओर से समग्र विकास का आह्वान हो रहा है। इस विकास की आधारशिलाएँ अनेक हैं उन्हीं में बैंविंâग भी एक है। आइए, विचार करें, बैंक की आवश्यकता क्यों पड़ी ?

समाज में ऐसे भी लोग हैं जिनके पास आवश्यकता से अधिक धन है। जब बैंकों की कमी थी, लोग कम पढ़े लिखे थे, अपने अतिरिक्त धन को जमीन में गाड़ कर, नींव में छिपाकर, सोना-चाँदी खरीद कर सुरक्षित समझते थे फिर भी वे निश्चिंत और निर्भय नहीं थे। बैंकों के प्रादुर्भाव से यही पैसा बैंकों में जमा किया जाने लगा जो राष्ट्र के अनेक विकास कार्यों, जरूरतमंद लोगों को ऋण देने आदि में व्यय किया जाने लगा और इसके बदले में जमाकत्र्ता को कुछ धन ब्याज के रूप में दिया जाने लगा। सारांश यह कि जो धन अचल था वह चल में बदल गया।

व्यापारिक द=ष्टिकोण से बैंकों की उपादेयता, महत्ता दिन-प्रतिदिन बढ़ती जा रही है। व्यापारी, बैंक में बड़ी-बड़ी धनराशि जमा करते हैं, निकालते हैं और व्यापार में लगाते हैं। बैंक की वर्तमान कार्य प्रणाली से बैंक का हर ग्राहक अपने को सुरक्षित तथा भयरहित समझ रहा है।

बैंक धन जमा करने, धन उधार देने वाली संस्था के रूप में कार्य करते हैं। वेतन, पेंशन का भी भुगतान बैंक के खाते के माध्यम से होने लगा है। यही नहीं, शिक्षा संस्थानों की शुल्क से आय, व=द्धावस्था पेंशन, आवास ऋण सहायता आदि का भी आहरण-वितरण बैंकों के माध्यम से होने लगा है।

बैंक भी भिन्न-भिन्न हैं। भारतीय स्टेट बैंक, पंजाब नेशनल बैंक, बैंक ऑफ बड़ौदा, इलाहाबाद बैंक, केनरा बैंक, डाकघर बैंक, ग्रामीण बैंक, जिला सहकारी बैंक आदि कुछ प्रमुख बैंक हैं। भारतीय जीवन बीमा निगम भी एक संस्था है जहाँ धन का आहरण-वितरण होता है।

उपर्युक्त के अतिरिक्त विनिमय पत्र, बचत पत्र, ऋण पत्र, यात्री चेकों का निर्गमन भी बैंक से होता है। आप देखेंगे कि बड़े-बड़े नगरों में एक ही बैंक की कई शाखाएँ अलग-अलग स्थानों पर स्थापित हैं तथा भिन्न-भिन्न बैंक भी पर्याप्त संख्या में हैं।

आप बैंक की उपयोगिता समझ गए होंगे। हम यहाँ बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करेंगे। विभिन्न चेकों, शेयर, ऋण पत्र, शेयर एवं ऋण पत्र में अन्तर, निवेश, अंकित मूल्य, बाजार मूल्य, दलाली आदि का व्यावहारिक ज्ञान प्राप्त करेंगे।

12.2 बैंक की जानकारी

निम्नांकित चित्र में लोग बैंक के विभिन्न खातों में से लेन-देन कर रहे हैं।

चित्र - 1

आइए, बैंक की कार्य प्रणाली का अध्ययन करें ।

- हम बैंक किस उद्देश्य से जाते हैं ?

धन जमा करने, उधार लेने, धन आहरण करने के लिए ।

- हम धन को बैंक में क्यों जमा करते हैं ?

धन को सुरक्षित रखने के लिए और ब्याज पाने के लिए ।

- बैंक में क्या-क्या कार्य होते हैं ?

बैंक व्यापारियों को व्यापार प्रारम्भ करने के लिए, छोटे किसानों को कृषि के लिए और बेरोजगारों को धन्धा शुरू करने के लिए ऋण देता है ।
बैंक खाताधारियों और सरकार के लिए भी कार्य करता है जैसे- स्वूâलों की फीस जमा करना, पानी और बिजली के बिल जमा करना, करों का भुगतान, मकान के लिए ऋण की किश्तें जमा करना, वेतन वितरण की सुविधा प्रदान करना, आदि ।

12.2.1 खाता के प्रकार

बैंक में हम कई तरह के खाते खोल सकते हैं, जिनमें से कुछ प्रमुख खाते निम्नवत् हैं :

(ग्) बचत खाता (Savings Bank Account)

(गग्) चालू खाता (Current Account)

(गगग्) सावधि जमा खाता (Fixed Deposit Account)

(ग्न्) आवर्ती (संचयी) जमा खाता (Recurring Deposit Account)

(न्) अल्पवयस्क का खाता (Minor Account)

(i) बचतखाता :

(i) बचतखाता :

इस खाते का मुख्य उद्देश्य, कम और मध्यम आय वर्ग के लोगों के लिए बचत की भावना को प्रोत्साहित करना है । यह खाता बैंक द्वारा निर्धारित न्यूनतम धनराशि 500 रुपये जमा करके खोला जा सकता है। हम अपने बचत खाते से धन निकालने के लिए आहरण फार्म (Withdrawl form)या चेक भरकर धन निकाल सकते हैं । खाते में न्यूनतम धनराशि 1000 रुपये रखने पर जमाकर्ता को बैंक से चेक बुक भी प्राप्त हो सकती है । निम्नांकित एक चेक का प्रारूप हैं :

क्र.
No. 412274

बैंक
BANK

0

Pay to .... का या धारक को
of Bearer

रुपये ....
Rupees ....

.... Rs. ....

.... अदा करे

LEDGER FOLIO NO

बचत बैंक खाता क्र. / SAVINGS BANK ACCOUNT NO

चित्र - 6

(गग्) चालू खाता

बड़े व्यापारी, वंâपनियाँ, निगम और संस्थाएँ नगद लेनदेन नहीं करते हैं। वे चेक द्वारा ही लेनदेन करते हैं। इसलिए वे बैंक में अपना चालू खाता खोलते हैं। इस खाते में बैंक जमा धनराशि पर कोई ब्याज नहीं देता है, परन्तु इसमें बचत खाते की अपेक्षा धन को कई बार निकाला या जमा किया जा सकता है। कभी-कभी बैंक खाताधारी से नाममात्र की फीस लेता है। वर्तमान में चालू खाता खोलने पर एक वर्ष में भारतीय स्टेट बैंक द्वारा 50 रुपये सेवाशुल्क भी(सर्विस चार्ज) के रूप में लिया जाता है।

(ггг) सावधि जमा खाता

इसमें धन निश्चित अवधि के लिए जमा किया जाता है। बैंक खाताधारी को प्रमाण-पत्र प्रदान करता है । इस प्रमाण-पत्र पर राशि, समय, ब्याजदर, ब्याज के अदायगी की विधि और जमा का प्रकार आदि लिखा रहता है। खाताधारी अवधि की समाप्ति पर धन निकालता है । फिर भी खाताधारी की आवश्यकता पर परिपक्वता की अवधि के पूर्व भी ब्याज दर में कटौतीकर भुगतान किया जा सकता है । सावधि जमा में ब्याज दर बचत खाते की अपेक्षा अधिक होती है । इसमें ब्याज वार्षिक, छमाही या तिमाही परिकलित किया जाता है ।

निम्नांकित सारणी में किसी समय विशेष की लागू ब्याज की दरें दी गई हैं :

क्रमांक समय अवधि ब्याज की दर (वार्षिक)

1. 15 दिन से 45 दिन तक 5ज्
2. 46 दिन से 179 दिन तक 6.25ज्
3. 180 दिन या अधिक परन्तु 1 वर्ष से कम 7ज्
4. 1 वर्ष या अधिक परन्तु 2 वर्ष से कम 8.5ज्
5. 2 वर्ष या अधिक परन्तु 3 वर्ष से कम 9ज्
6. 3 वर्ष और अधिक के लिए 10ज्

ध्यान दें : उपर्युक्त ब्याज दर परिवर्तनीय है। समय-समय पर बैंक के निर्देशानुसार ब्याज दर में परिवर्तन होता रहता है।

(ग्र्) आवर्ती या संचयी जमा खाता

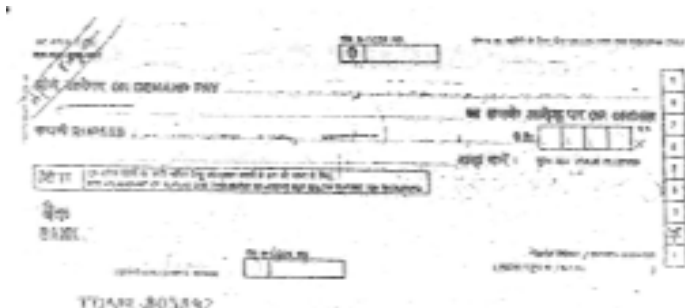
इसमें एक निश्चित धन (जो 5 रुपये या 10 रुपये के गुणांक के रूप में होना चाहिए) प्रतिमाह निश्चित अवधि (जो कम से कम 12 माह, अधिक से अधिक 10 वर्ष) तक जमा करना होता है । इस खाते में ब्याज की दरें बचत खाते की दर की अपेक्षा अधिक होती हैं। यह योजना उन व्यक्तियों के लिए उपयोगी हैं जो नियमित रूप से अल्प धनराशि बचाना चाहते हैं । आवर्ती जमा योजना डाकघरों

में भी संचालित है और इनकी ब्याज की दरें बैंक की ब्याज दरों से अधिक होती हैं ।

(न्) अल्पवयस्क का खाता

18 वर्ष की आयु से कम आयु वाला व्यक्ति अल्पवयस्क कहलाता है। अल्पवयस्क व्यक्ति को भी बैंक में खाता खोलने का अधिकार है। वह चालू खाता खोलने का अधिकारी नहीं होता। अल्पवयस्क व्यक्ति या तो अपने नाम से खाता खोल सकता है या अपने और अपने अभिभावक के संयुक्त नाम से। अल्पवयस्क की आयु कम से कम 12 वर्ष होना आवश्यक है। 12 वर्ष से कम की स्थिति में केवल अभिभावक ही खाता खोल सकता है।

12.2.2 बैंक ड्राफ्ट

डाकघरों से पत्रों की भाँति धन भी एक स्थान से दूसरे स्थान को 'मनीऑर्डर' पत्र के माध्यम से भेजा जाता है। इसी प्रकार बैंक भी धन स्थानान्तरण के लिए 'बैंक माँग पत्र' (अस्aह् Draf़) या बैंक ड्राफ्ट (ँaहव् Draf़) निर्गत करते हैं। बैंक ड्राफ्ट बैंक की एक शाखा का अपनी ही किसी अन्य शाखा के नाम एक आज्ञा के रूप में होता है जिसमें एक नियत राशि उस व्यक्ति को दिए जाने का आदेश होता है जिसके नाम ड्राफ्ट निर्गत किया गया है। धन भेजने वाला व्यक्ति एक निर्दिष्ट राशि बैंक को दे कर ड्राफ्ट बनवाता है। बैंक धन पाकर ड्राफ्ट निर्गत करता है। ड्राफ्ट में अधिकृत व्यक्ति अर्थात् जिसका नाम बैंक ड्राफ्ट में उल्लिखित हो बैंक की निर्दिष्ट शाखा में ड्राफ्ट प्रस्तुत करता है। साथ ही अपने खाते में डाल देता है। उसका भुगतान उसी के खाते के माध्यम से किया जाता है। ध्यान रहे ड्राफ्ट निर्गत करने वाली शाखा, स्थानान्तरित होने वाली धनराशि पर बैंक के नियम के अनुसार कुछ कमीशन लेती है।निम्नलिखित एक खाली बैंक ड्राफ्ट का प्रारूप है।

चित्र - 7

12.2.3 मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा (लॉकर)

बैंक जहाँ धन संबंधी कार्य करते हैं वहीं कीमती वस्तुओं, आभूषणों, दस्तावेजों की सुरक्षा के लिए भी व्यवस्था करते हैं। इस कार्य के लिए बैंक के पास अतिसुद=ढ़, कक्ष होते हैं जिनमें लॉकर की व्यवस्था होती है। निर्दिष्ट किराया दे कर कोई व्यक्ति बैंक के स्ट्रांग रूम में रखी आलमारी में एक लॉकर किराये पर ले सकता है। लॉकर 2 वुंâजियों (चाबियों) के लगाने पर खुलता-बन्द होता है। एक चाभी लॉकर किराये पर लेने वाले को दी जाती है। और दूसरी चाभी जिसे मास्टर की कहते हैं, बैंक में रख ली जाती है। िबैंक के लॉकर में रखी वस्तुओं की जानकारी बैंक वालों को भी नहीं हो पाती है। लॉकर खोलने के लिए बैंक का कर्मचारी मास्टर की लगा कर एक ताले को खोल कर अलग हट जाता है और वह व्यक्ति अपनी चाबी लगा कर लॉकर को खोल लेता है।

12.3. धन निकालने की विधियाँ -

(1) निकासी (आहरण) फार्म द्वारा

(2) चेक द्वारा

आहरण फार्म बैंक से निःशुल्क मिलता है। ग्राहक फार्म को भली भाँति भरकर बैंक में पासबुक सहित प्रस्तुत करता है। अधिकारी हस्ताक्षर सहित अन्य तथ्यों की मिलान जाँच करते हैं। उपयुक्त पाये जाने पर धन ग्राहक को दे दिया जाता है। देखें

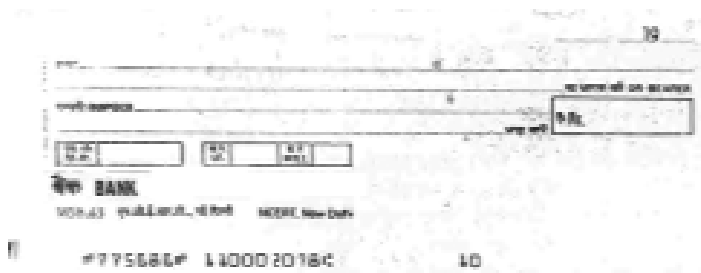
निकासी आदेश फॉर्म (Withdrawal Form)

CARE

बैंक BANK

नकद भुगतान

चेक

आहरण प्रपत्र की तरह चेक भी बैंक द्वारा निर्गत एक छपी हुई पर्ची के रूप में होता है। चेकों पर एक संख्या पड़ी होती है तथा यह ग्राहक को 10, 20, 25 या 100 चेकों की पुस्तिका के रूप में दी जाती है। बैंक चेकबुक के लिए भी ग्राहक से नकद मूल्य प्राप्त करता है नकद न मिलने पर खाते से चेकबुक के मूल्य की धनराशि काट ली जाती है। देखिए,

बैंकों ने अपनी कार्य प्रणाली को सुद=ढ़ करने हेतु जमाकर्ताओं को धन निकालने या भुगतान करने हेतु चेक की सुविधा प्रदान की है। चेक एक शर्त रहित आज्ञापत्र है जो सम्बन्धित खाते से रुपये निकालने के लिए काम आता है ।

चेक के प्रकार

चेक निम्नलिखित तीन प्रकार के होते हैं ।

(ग्) वाहक चेक या धारक चेक (बियरर चेक)

(ग्ग्) आदेशित चेक (आर्डर चेक)

(ग्ग्ग्) रेखांकित चेक (क्रास चेक)

वाहक चेक

यह चेक जिसके नाम होता है वह स्वयं अथवा किसी वाहक के द्वारा उस पर लिखी धनराशि को बैंक से प्राप्त कर सकता है । चेक पर खातेदार का हस्ताक्षर आवश्यक है।

आदेशित चेक

इस प्रकार के चेक का भुगतान बैंक मात्र उसी व्यक्ति को करेगा जिसके नाम चेक काटा गया है।

रेखांकित चेक

जब चेक के बाँये कोने पर दो तिरछी समान्तर रेखाएँ खींचकर उनके मध्य **& Co., Not - Negotiable DeLeJee A/c Payee Only**लिख देते हैं, ऐसे चेक को रेखांकित चेक कहते हैं ।A/c Payee Only या Not Negotiable लिखे चेक का भुगतान चेक धारक अपने खाते में ही जमा करके प्राप्त कर सकता है कित्र्तु ण्द वाला क्रास चेक दूसरे के चालू खाते में भी जमा करके प्राप्त किया जा सकता है।

बचत खाते की पास बुक में प्रव=ष्टियों के आधार पर ब्याज की गणना

बचत खाते में ब्याज का परिकलन वर्ष में प्रायः दो बार छः-छः माह में किया जाता है । पहले बैंक किसी माह का ब्याज खाताधारक के द्वारा जमा धनराशि पर उस माह की 10 तारीख और अन्तिम तारीख के बीच न्यूनतम धनराशि पर देता था। किन्तु वर्तमान में रिजर्व बैंक के आदेशानुसार अब ब्याज की गणना दैनिक अवशेष राशि के आधार पर की जाती है तथा वर्तमान में बचत खातों पर 4ज्ञ् वार्षिक की दर से ब्याज दिया जाता है । परन्तु रिजर्व बैंक आफ इण्डिया द्वारा देय ब्याज दरों में समय-समय पर संशोधन किया जाता रहता है। बचत खाते की सुविधा डाकघर में भी होती है ।

सोचिए और प्रयास कीजिए

आप भी, अपने प्रधानाचार्य से परामर्श करें, विद्यालय स्तर पर छात्रों का एक सहकारी बैंक स्थापित करने के लिए आग्रह करें, इससे परस्पर सहयोग की भावना का उदय होगा, बैविंâग सीखने का अवसर सुलभ हो जाएगा।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. बैंक के क्या-क्या कार्य हैं ?
2. बैंक से धन वैâसे निकाला जाता है ?
3. बैंक में कितने प्रकार के खाते खोले जा सकते हैं?
4. नीचे दिये गये खातों में अन्तर स्पष्ट कीजिए-

(ग्) बचत खाता, (गग्) चालू खाता
(गगग्) सावधि जमा खाता (ग्न्) आवर्ती जमा खाता

5. चेक कितने प्रकार के होते हैं, प्रत्येक के विषय में जानकारी दीजिए ।

टिप्पणी : समीप के बैंक में जाकर खातों के प्रकार, खातों को खोलने, धन जमा करने, धन निकालने की प्रक्रिया तथा विभिन्न प्रकार के प्रपत्रों की जानकारी प्राप्त करें ।

12.4शेयर और लाभांश (Share and Dividend)

जब कोई व्यक्ति कोई व्यापार या उद्योग करने के लिए स्वयं धन एकत्रित नहीं कर पाता है तो वह एक समूह बनाकर एक वंâपनी की स्थापना करता है और उस वंâपनी को पंजीकृत करा लेता है। इस प्रकार की वंâपनी जनता से पूँजी प्राप्त करने के लिए शेयर जारी करके पूँजी प्राप्त करती है ।

- कम्पनी में लगाया पूरा धन उसकी पूँजी कहलाता है ।
- पूँजी को प्राय: समान मूल्य की इकाइयों में बाँट दिया जाता है, प्रत्येक इकाई को शेयर कहते हैं।

यदि वंâपनी को जनता से एक करोड़ रुपये एकत्रित करना है तो वह गणना की द=ष्टि से दस-दस रुपये के शेयरों में बाँट लेती है । इस प्रकार इसके दस लाख शेयर हो जाते हैं। दी हुई शर्तों के अनुसार जनता को विज्ञापन द्वारा वंâपनी में पूँजी लगाने के लिए इन शेयरों को खरीदने के लिए आमंत्रित किया जाता है ।

सभी को वांछित संख्या में शेयर आवंटित करने में कठिनाई होती है क्योंकि पूर्व से ही शेयरों की संख्या निश्चित होती है । जिन्हें शेयर आवंटित किए जाते हैं वे शेयर खरीद लेते हैं ।
शेयर खरीदने वाला व्यक्ति वंâपनी का शेयरधारी या अंशधारी कहलाता है।
प्रत्येक शेयरधारी को वंâपनी की ओर से एक प्रमाणपत्र दिया जाता है जिसमें उन शेयरों का मूल्य और संख्या लिखी होती है जिसके लिए उसने धन लगाया है ।
जिस मूल्य पर एक शेयर वंâपनी द्वारा जारी किया जाता है, उसे सममूल्य या अंकित मूल्य या पेâस वैल्यू या पार वैल्यू कहते हैं ।
उदाहरण 3. एक वंâपनी नई योजना के लिए 50 लाख रुपये की पूँजी एकत्रित करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है । यदि एक शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये हो, तो वंâपनी द्वारा जारी किए गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए ।
हल : कुल पूँजी जो एकत्रित करनी है =50 लाख रुपये
एक शेयर का अंकित मूल्य =100 रुपये
माना जारी किए गये शेयरों की संख्या n है ।
अत: $n \times 100 = 50,00,000$

$$n = \frac{50,00,000}{100} = 50,000$$

अत: वंâपनी 50, 000 शेयर जारी करेगी ।

12.4.1 लाभ और लाभांश का वितरण

जब वंâपनी को वर्ष के अन्त में लाभ होता है, तो लाभ का कुछ भाग नयी मशीन खरीदने या टैक्स देने आदि में आरक्षित कर दिया जाता है। श्ोष लाभ को शेयरधारियों को उनके द्वारा खरीदे गए शेयरों के अनुपात में बाँट दिया जाता है। इस लाभ को लाभांश कहते हैं। लाभांश अंकित मूल्य पर दिया जाता है।
यह लाभांश प्रति शेयर की दर या प्रतिशत की दर से वितरित किया जाता है। जैसे-यदि लाभांश 10 रुपये प्रति शेयर की दर से 100 शेयर के अंशधारी को दिया जाय तो उसे 1000 रुपये का लाभांश मिलेगा। 25 प्रतिशत लाभ का अर्थ है कि 100 रुपये के अंशधारी को 25 रुपये का लाभांश मिलेगा।

12.5 ऋणपत्र

वंâपनियाँ अपने कारोबार को और बढ़ाने के लिए श्ोयर के स्थान पर ऋणपत्र **(Debentures)** जारी करती हैं, ये ऋणपत्र आम जनता से, जिनमें शेयरधारी भी सम्मिलित हो सकते हैं, ऋण प्राप्त करने हेतु जारी किये जाते हैं। वंâपनियाँ निश्चित अवधि के लिए ऋण लेती हैं और उस पर निश्चित दर से ऋणपत्र-धारकों को ब्याज अदा करती रहती हैं । जिस निश्चित अवधि के लिए ऋणपत्र जारी होते हैं, वह ऋणपत्रों पर लिखी होती है । ऋण की समयावधि समाप्त होने पर वंâपनियाँ ऋणपत्र धारकों को उनसे लिया गया ऋण वापस कर देती हैं ।

शेयरों की ही भाँति ऋणपत्रों का भी निश्चित (या नियत) मूल्य उसका 'सममूल्य' या 'अंकित मूल्य' कहलाता है । ऋणपत्र भी बेचे या खरीदे जा सकते हैं, अत: इनका भी बाजार - मूल्य होता है जो स्थिर नहीं होता और दिन-प्रतिदिन बदलता रहता है । जहाँ तक ब्याज के परिकलन का प्रश्न है, वह ऋणपत्र के सममूल्य पर ही परिकलित किया जाता है, न कि बाजार-मूल्य पर ।
शेयर वंâपनी की पूँजी का अंग होता है और वंâपनी इसे वापस नहीं करती है जबकि ऋणपत्र के आधार पर लिया गया ऋण निश्चित अवधि के अंत में वंâपनी द्वारा वापस कर दिया जाता है । जहाँ शेयर धारी वंâपनी का हिस्सेदार (मालिक) होता है, वहीं ऋणपत्र-धारक केवल वंâपनी को ऋण देता है और उसका हिस्सेदार नहीं होता। इसी प्रकार शेयर पर लाभ आधारित विभिन्न दरों पर लाभांश दिया जाता है जबकि ऋणपत्र पर पूर्व निर्धारित दर पर ब्याज दिया जाता है, चाहे भले ही वंâपनी घाटे में जा रही हो । ब्याज का परिकलन प्राय: छमाही अथवा वार्षिक किया जाता है ।

- दलाली श्ोयर के बाजार मूल्य पर ली या दी जाती है, उसके अंकित मूल्य पर नहीं।
- किसी शेयर के बेचने पर प्राप्तव्य राशि =बाजार मूल्य - दलाली
- किसी शेयर को खरीदने पर खर्च की गई राशि =बाजार मूल्य ± दलाली

उदाहरण 4. एक व्रेâता को 10 रुपये के 200 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा, यदि शेयर का बाजार मूल्य 50 रुपये प्रति शेयर बताये गये हैं ? शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था?

हल : शेयर का अंकित मूल्य =10 रुपये

1 शेयर का बाजार मूल्य =50 रुपये

व्रेâता द्वारा दिया गया मूल्य 200×50 रुपये

=10,000 रुपये

शेयरधारी को प्रति शेयर लाभ =(50-10) रुपये

=40 रुपये

अत: 200 शेयरों पर लाभ =200×40 रुपये

=8000 रुपये

उदाहरण 5 : अरुणा ने 7500 रुपये की पूँजी लगाकर एक कम्पनी के शेयर 150 रुपये प्रति शेयर की दर से क्रय किया, जबकि प्रति शेयर का अंकित मूल्य 100 रुपये था। वंâपनी ने 25ज्ञ् की दर से वर्ष के अन्त में लाभांश दिया। अरुणा द्वारा अर्जित लाभांश ज्ञात कीजिए ।

हल : अरुणा द्वारा क्रय किये गये शेयर · $\frac{7500}{150}$

· 50

50 शेयरों का अंकित मूल्य = 50 × 100 रुपये

=5000 रुपये

अरुणा द्वारा प्राप्त लाभांश · $\frac{5000 \times 2}{100}$ रुपये

=1250 रुपये

उदाहरण 6 : 100 रुपये अंकित मूल्य के 200 शेयर जिनका सम्प्रति बाजार मूल्य 120 रुपये प्रति शेयर और दलाली 2ज्ञ् है, खरीदने के लिए कितना धन चाहिए ।

हल : 784.ज्हु1 शेयर का बाजार मूल्य =120 रुपये

789.ज्हु 200 शेयर का बाजार मूल्य · 200 × 120 रुपये

=24000 रुपये

दलाली =बाजार मूल्य का 2 प्रतिशत

· $\frac{24000 \times 2}{100}$ रुपये =480 रुपये

200 शेयर को खरीदने के लिए धनराशि

=बाजार मूल्य ± दलाली

=24000 रुपये ± 480 रुपये

=24480 रुपये

प्रयास कीजिए :

1. आप की आयु 11 वर्ष है। आप बैंक में खाता खोलना चाहते हैं। स्थिति समझाइए।

2. राधिका के पास बैंक से चेक बुक प्राप्त है। वह बीमारी के कारण स्वयं बैंक नहीं जाना चाहती है किन्तु रुपये की उसे नितान्त आवश्यकता है। वह अपनी वयस्क बहन निर्मला को अपने हस्ताक्षर से एक आर्डर चेक रेखाँकित करके दे देती है। निर्मला बैंक जाती है और रुपये प्राप्त करने का प्रयास करती है ? क्या निर्मला को धन प्राप्त हो जाएगा ?

3. शेयर और ऋण पत्र का अन्तर समझाइए।

अभ्यास 12 (a)

1. पूँजी किसे कहते हैं ?
2. शेयरधारी किसे कहते हैं? शेयर धारक तथा ऋणधारक में क्या अन्तर है ?
3. अंकित मूल्य और बाजार मूल्य में क्या अन्तर है ?
4. शेयर बट्टे पर कब होता है ?
5. लाभांश किसे कहते हैं ?
6. लाभांश शेयर के किस मूल्य पर दिया जाता है?
7. एक वंâपनी ` 25 लाख की पूँजी एकत्रित करने के लिए शेयरों का विज्ञापन करती है। यदि एक शेयर का अंकित मूल्य ` 100 हो तो वंâपनी द्वारा जारी किये गये शेयरों की संख्या ज्ञात कीजिए।
8. एक व्रेâता को एक शेयर का अंकित मूल्य ` 10 और बाजार मूल्य ` 40 प्रति शेयर बताया गया हो तो

(ग) व्रेâता को 300 शेयरों के लिए क्या मूल्य देना पड़ेगा ?

(गग) शेयरधारी को क्या लाभ होगा, जबकि उसने शेयर अंकित मूल्य पर खरीदा था ?

9. निशा ने ` 12,000 की पूँजी लगाकर एक वंâपनी के शेयर ` 300 प्रति शेयर की दर से खरीदा जबकि प्रति शेयर का अंकित मूल्य ` 100 था। वंâपनी ने 15ज्ञ् की दर से वर्ष के अन्त में लाभांश दिया । निशा द्वारा अर्जित लाभांश ज्ञात कीजिए ।
10. ` 100 अंकित मूल्य के 150 शेयर जिनका बाजार मूल्य ` 300 प्रति शेयर और दलाली 3ज्ञ् है, खरीदने के लिए कितना धन चाहिए ?

प्रोजेक्टः

1. समाचार पत्रों में शेयर बाजार के भावों को पढ़कर 10 वंâपनियों के एक सप्ताह तक के शेयर भाव सम्बन्धी आँकड़े बनाकर कक्षा में प्रस्तुत करें तथा आपस में एक दूसरे से मिलान करें। यह भी स्पष्ट करें कि उस सप्ताह किस वंâपनी के शेयर भाव बढ़ रहे हैं तथा किस वंâपनी के शेयर भाव घट रहे हैं ।

2. एक सप्ताह तक दूरदर्शन का अवलोकन करके शेयर बाजार के सूचकांक अंकित करके कक्षा में प्रस्तुत करें तथा इनके उतार-चढ़ाव का भी अध्ययन करें ।

हमने क्या चर्चा की ?

1. बैंक ऐसी संस्था है जो धनराशि जमा करती है, ऋण देती है तथा धन के स्थानान्तरण में सहायक होती है

2. बैंक में विभिन्न खातों का परिचालन होता है जिनमें कुछ प्रमुख खाते निम्न है।

(ग) चालू खाता (गग) बचत खाता

(गगग) मियादी जमा खाता (ग्र) आवर्ती (संचयी) जमा खाता

(न) अल्पवयस्क का खाता

(नग) मूल्यवान वस्तुओं की सुरक्षा के लिए लॉकर

3. वर्तमान में ब्याज की गणना दिन प्रतिदिन के शेष राशि के आधार पर की जाती है।

4. जमा-पर्ची के माध्यम से धन जमा करते हैं तथा विभिन्न प्रकार के चेकों के माध्यम से या निकासी प्रपत्र (withdrawal form) से धन आहरित करते हैं।

5. चेक भाँति-भाँति के हो सकते हैं, जैसे कि

(ग) धारक चेक

(गग) आदेश चेक

(गगग) रेखांकित चेक

6. मांग पत्र (Demand Draft) के आधार पर भी धन स्थानान्तरित होते हैं।

7. वह सुविधाजनक इकाई या अंश (सामान्यतः 10 रुपये) जिसमें एक संयुक्त स्टाक कम्पनी की पूँजी विभाजित की जाती है शेयर कहलाता है।

8. जिस मूल्य पर वंâपनी अपना शेयर निर्गत करती है वह शेयर का अंकित मूल्य या सममूल्य कहलाता है।

9. यदि किसी शेयर का बाजार मूल्य उसके अंकित मूल्य से अधिक हो वह अधिमूल्य पर या प्रीमियम पर कहलाता है।

10. जब किसी शेयर का बाजार मूल्य अंकित मूल्य से कम हो तो वह अवमूल्य पर या बट्टे पर कहलाता है।

11. यदि शेयर का बाजार मूल्य =शेयर का अंकित मूल्य तो शेयर सममूल्य पर कहलाता है।

12. शेयरों पर लाभांश तथा ऋणपत्रों पर ब्याज उनके अंकित मूल्यों पर परिकल्पित किया जाता है। ऋण पत्रों पर कोई लाभांश नहीं दिया जाता है।

आइये सीखें सही नोट की पहचान वैâसे करें ?

सही नोट की पहचानने के लिये कुछ साधारण नियमों का पालन करें।
नोट को पैâलाकर किसी समतल पर रखें। छुए और अनुभव करें।
 उभारदार मुद्रण (इंटैग्लियो प्रिंटिंग)
बैंक नोट के कतिपय हिस्सों को "उभारदार मुद्रण" में मुद्रित किया गया है जिन्हें 8 स्थानों पर स्पर्श करके अनुभव किया जा सकता है। 1- भारतीय रिजर्व बैंक की मोहर, 2. केन्द्रीय सरकार द्वारा प्रत्याभूत , 3. मैं धारक को 100 रूपया अदा करने का वचन देता हूँ, 4. भा0रि0बैंक गवर्नर का हस्ताक्षर, 5. नोट पर त्रिभुज का चिह्न (100 के नोट पर), चिह्न (500 के नोट पर), चिह्न (1000 के नोट पर), 6. अशोक की लाट का वचन चिह्न, 7. नोट की दायीं ओर भारतीय रिजर्व बैंक की सील, 8. नोट के दायीं ओर गुप्त आकृति।
 नोट के दोनों ओर मुद्रित पुष्पाकृति डिजाइन एक-दूसरे पर बिल्कुल ठीक बैठती है और रोशनी के सामने देखने पर ये नोट एकरूप होती हुई दिखती हैं।
 नोट को रोशनी के सामने देखने पर वाटरमार्वâ में महात्मा गांधी का चित्र और रुपये का मूल्य देखा जा सकता है।
 "भारत" और "R.ँ.घ्." लिखा हुआ चाँदी के रंग का सुरक्षा धागा नोट के अग्र भाग पर थोड़ा छिपा हुआ और थोड़ा दिखता हुआ नजर आता है।
 नोट के प=ष्ठ भाग में उस नोट के छपाई का वर्ष लिखा होता है। वर्ष 2005 में कुछ अतिरिक्त सुरक्षा विशेषताओं वाले बैंक नोट जारी किए गए।
एक स्वच्छ नोट भारतीय अभिमान का प्रतीक है। अत: इसे वैâसे स्वच्छ रखें ? आइए जानें

- नोट पर कुछ भी नहीं लिखें
- नोट को अधिक मोड़ कर न रखें।
- नोट को गन्दे हाथों से न छुएं
- नोट को स्टैपिल / पंच न करें

अभ्यास 12 (a)

7. 25000; 8. (ग) ` 12000 , (गग) ` 9000 ; 9. ` 600; 10. ` 46350

इकाई - 13 वृत्त और चक्रीय चतुर्भुज

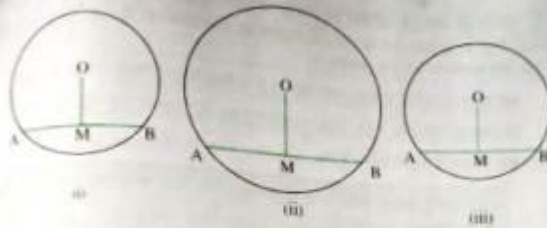
- निम्नलिखित प्रगुणों का प्रायोगिक सत्यापन
- वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है तथा इसका विलोम
- वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं तथा इसका विलोम
- चक्रीय चतुर्भुज, चक्रीय बिन्दु, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण
- चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है

13.1 भूमिका -

पिछली कक्षाओं में हम वृत्त की अवधारणा के साथ-साथ वृत्त से सम्बन्धित पारिभाषिक शब्दों त्रिज्या, व्यास, चाप, जीवा, त्रिज्यखंड, वृत्तखंड एवं वृत्त की जीवा या चाप द्वारा वृत्त के बिन्दुओं और उसके केन्द्र पर बनने वाले भिन्न-भिन्न कोणों के परस्पर संबंधों की जानकारी प्राप्त कर ली है। वृत्त से संबंधित ज्ञान को विस्तृत करने के क्रम में इस इकाई में हम वृत्त की जीवा और केन्द्र से उसकी दूरी में विशिष्ट एवं रोचक संबंधों तथा वृत्त के किन्हीं चार बिन्दुओं के मिलाने से बनने वाले चतुर्भुज तथा सम्मुख कोणों के बीच सम्बन्धों का भी अध्ययन करेंगे।

13.2 वृत्त के केन्द्र से जीवा पर डाला गया लम्ब उसे समद्विभाजित करता है :

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

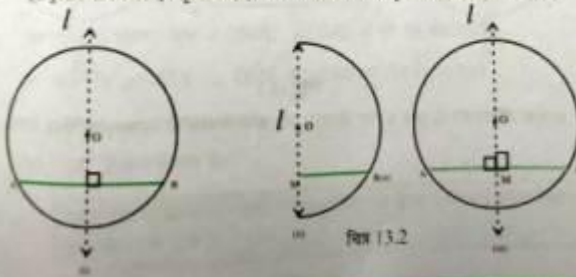
तीन विभिन्न त्रिज्याओं के वृत्त खींचिए जिनमें प्रत्येक का केन्द्र O लीजिए। पहले वृत्त में एक जीवा AB खींचिए। अब सेट स्क्वायर की सहायता से जीवा AB पर बिन्दु O से लंब OM खींचिए जो जीवा AB से बिन्दु M पर मिले। AM और BM को नापिए। AM - BM का मान ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.1

यही प्रक्रिया अन्य दो वृत्तों के लिए दोहराइए और प्राप्त परिणामों को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवत् अभिलिखित कीजिए।

वृत्त का क्रमांक	AM	BM	AM - BM
i.			
ii.			
iii.			

सारणी से हम प्रत्येक स्थिति में पाते हैं कि AM - BM का मान शून्य है या AM - BM का मान इतना कम है कि उसे नगण्य मान सकते हैं। इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में हम कह सकते हैं कि AM = BM।

इन्हें कीजिए, तर्क करें तथा निष्कर्ष निकालें

एक ट्रेसिंग कागज पर एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O हो तथा वृत्त को काट कर अलग करें।

चित्र 13.2

वृत्त की एक जीवा AB खींचिए। सेट स्क्वायर की सहायता से AB पर लंब एक रेखा l खींचिए जो वृत्त के केन्द्र O से हो कर जाती है। वृत्त को रेखा l के अनुदिश इस प्रकार मोड़िए कि बिन्दु A, बिन्दु B पर आकर मिले तथा मोड़ का निशान रेखा l के अनुदिश हो।

अब कागज को खोलिए तथा मोड़ का निशान AB के जिस बिन्दु पर मिलता है, उसे M कहिए।

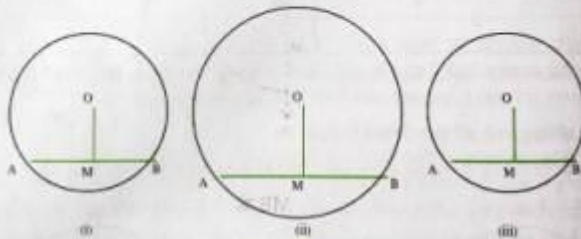
इस प्रकार हम पाते हैं कि AM, BM को पूरी तरह ढक लेता है तथा OM, AB के लंबवत है।

अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

> **किसी वृत्त में उसके केन्द्र से उसकी किसी जीवा पर खींचा गया लम्ब, जीवा को समद्विभाजित करता है।**

13.2.1 वृत्त के केन्द्र को जीवा के मध्य बिन्दु से मिलाने वाली रेखा, जीवा पर लम्ब होती है:

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

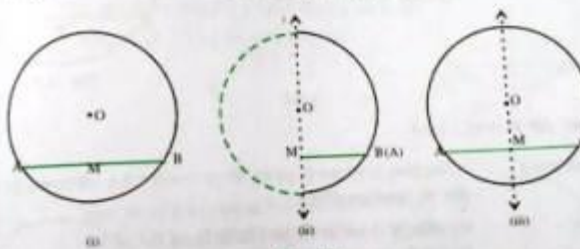
अपनी अभ्यास पुस्तिका पर तीन विभिन्न त्रिज्याओं के वृत्त खींचिए जिनमें प्रत्येक का केन्द्र O हो। पहले वृत्त में एक जीवा AB खींचिए तथा इसका मध्य बिन्दु M लीजिए। केन्द्र O को बिन्दु M से मिला दीजिए। इस प्रकार बने ∠OMA को नापिए तथा 90° - ∠OMA का मान ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.3

उपर्युक्त प्रक्रिया शेष दो वृत्तों के लिए दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	OMA	90° - OMA
i.		
ii.		
iii.		

आप पायेंगे कि प्रत्येक स्थिति में 90° - ∠OMA का मान शून्य या लगभग शून्य है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि OMA = 90° अतः OM, जीवा AB के लम्बवत है।

इन्हें भी करिए, तर्क करिए और निष्कर्ष निकालिए

एक ट्रेसिंग कागज पर एक वृत्त खींचिए, जिसका केन्द्र O हो। उस पर एक जीवा AB खींचिए और जीवा AB का मध्य बिन्दु निर्धारित कर उसे M कहें। बिन्दु M और बिन्दु O को मिलाये, जिससे रेखा MO मिल जाय। MO के अनुदिश कागज को इस प्रकार मोड़िये कि बिन्दु A, बिन्दु B पर आकर मिले।

चित्र 13.4

अब कागज को खोलिए। क्या ∠OMA, ∠OMB को पूरी तरह ढक लेता है।

आप पायेंगे कि ∠OMA, ∠OMB को पूरी तरह ढक लेता है। इस प्रकार

∠OMA = ∠OMB = 90°

अतः OM, AB पर लंबवत् है।

> **किसी वृत्त के किसी भी जीवा के मध्य बिन्दु को केन्द्र से मिलाने वाला रेखाखंड जीवा पर लम्ब होता है।**

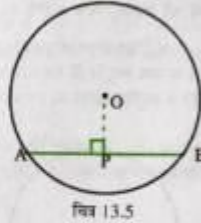
उपर्युक्त दोनों परिणामों को हम निम्नवत् लिख सकते हैं।

किसी वृत्त के केन्द्र से उसकी जीवा पर डाला गया लम्ब जीवा को समद्विभाजित करता है तथा विलोमतः वृत्त के केन्द्र को उसकी जीवा के मध्यबिन्दु से मिलाने वाला रेखाखंड जीवा पर लम्ब होता है।

उदाहरण 1. : पार्श्व चित्र 13.5 में वृत्त का केन्द्र O है तथा उसकी एक जीवा AB है, केन्द्र O से जीवा AB पर OP लंब है यदि AB = 6 सेमी हो तो AP की लंबाई ज्ञात करें।

हल : हम जानते हैं कि वृत्त के केन्द्र से उसके किसी भी जीवा पर डाला गया लंब जीवा को समद्विभाजित करता है।

इस प्रकार O वृत्त का केन्द्र तथा P जीवा AB का मध्य बिन्दु है।

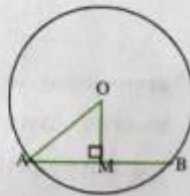
अतः
$$AP = \frac{1}{2} AB$$
$$= \frac{1}{2} \times 6 \text{ सेमी}$$
$$= 3 \text{ सेमी}$$

चित्र 13.5

अतः AP की लम्बाई 3 सेमी है।

उदाहरण 2 : 10 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त है। इस वृत्त की एक जीवा केन्द्र से 8 सेमी लम्बवत दूरी पर है। जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि O केन्द्र का एक वृत्त है जिसकी त्रिज्या 10 सेमी है। इस वृत्त में एक जीवा AB है और OM ⊥ AB , जैसा कि पार्श्व चित्र में दिखाया गया है।

हम जानते हैं कि AM = BM

(क्योंकि $OM \perp AB$ है)

चित्र 13.6

ΔOMA में $\angle M = 90^\circ$, OM = 8 सेमी और OA = 10 सेमी

पाइथागोरस प्रमेय से समकोण ΔOMA में

$$OM^2 + AM^2 = OA^2$$

या,
$$AM^2 = OA^2 - OM^2$$
$$= 10^2 - 8^2$$
$$= 100 - 64$$
$$= 36$$
$$\therefore AM = \sqrt{36}$$
$$= 6$$
$$\therefore AB = 2 \times 6 \text{ सेमी} = 12 \text{ सेमी}$$

अतः **जीवा की लम्बाई = 12 सेमी**

अभ्यास 13 (a)

1. पार्श्व चित्र 13.7 में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त की त्रिज्या 5 सेमी है। वृत्त की एक जीवा AB है जिसकी लम्बाई 6 सेमी है। यदि OM ⊥ AB तो OM की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.7

2. पार्श्व चित्र 13.8 में O वृत्त का केन्द्र है और वृत्त की त्रिज्या 13 सेमी है। AB वृत्त की जीवा है। यदि लम्ब OM = 5 सेमी , तो जीवा AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

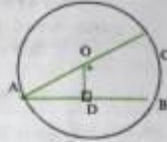
चित्र 13.8

3. एक वृत्त में एक 10 सेमी लम्बी जीवा खींची गयी है जिसकी वृत्त के केन्द्र से दूरी 12 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

4. एक वृत्त में एक 8 सेमी लम्बी जीवा खींची गयी है जिसकी केन्द्र से दूरी 3 सेमी है। इस वृत्त खींची गयी एक अन्य जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए जिसकी केन्द्र से दूरी 4 सेमी है।

प्रश्न 5 तथा 6 में सही विकल्प बताइये :

5. पार्श्व चित्र 13.9 में वृत्त का केन्द्र O है जिसकी एक जीवा AB = 30 मिमी तथा व्यास AC = 34 मिमी। जीवा AB की केन्द्र से दूरी OD होगी

(i) 34 मिमी (ii) 17 मिमी
(iii) 15 मिमी (iv) 8 मिमी

चित्र 13.9

6. पार्श्व चित्र 13.10 में O वृत्त का केन्द्र है। त्रिज्या OA = 5.0 सेमी और जीवा AB = 8 सेमी। केन्द्र O से जीवा पर लम्ब त्रिज्या OCD खींची गयी है। रेखाखंड CD की माप होगी

(i) 1.1 सेमी (ii) 1.5 सेमी
(iii) 2.0 सेमी (iv) 3.0 सेमी

चित्र 13.10

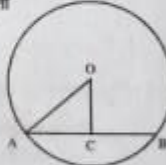
7. पार्श्व चित्र 13.11 में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $OC \perp AB$; तो निम्नलिखित कथनों में सत्य और असत्य कथन छाँटिए :

(i) $AC = CB$

(ii) $AB = \frac{1}{2}AC$

(iii) $AB = 2AC$

(iv) $OC = \sqrt{OA^2 - AC^2}$

(v) $AC = \sqrt{OA^2 + OC^2}$

चित्र 13.11

केन्द्रीय कोण

जिस कोण का शीर्ष किसी वृत्त का केन्द्र हो उसे उस वृत्त का केन्द्रीय कोण कहते हैं। केन्द्रीय कोण की प्रत्येक भुजा वृत्त को अलग अलग बिन्दुओं पर काटती है। इन बिन्दुओं को मिलाने से वृत्त की जीवा बन जाती है।

चित्र 13.12

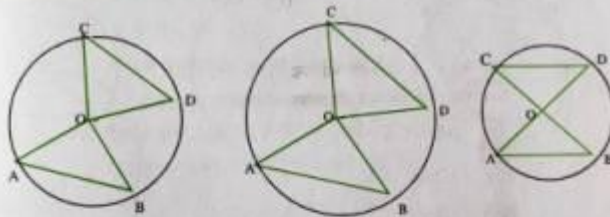
पार्श्व चित्र 13.12 में एक वृत्त है, जिसका केन्द्र O है। ∠AOB का शीर्ष वृत्त का केन्द्र O है। ∠AOB की किरणें वृत्त को बिन्दु A और B पर काटती है तथा AB वृत्त की जीवा है। इस प्रकार ∠AOB केन्द्रीय कोण है।

13.2.2 वृत्त की समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं

इन्हें करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर चित्रानुसार तीन वृत्त खींचिए जिनकी त्रिज्याएँ भिन्न-भिन्न हों। प्रत्येक का केन्द्र O लीजिए। पहले वृत्त में दो जीवाएँ AB और CD इस प्रकार खींचिए कि AB = CD

रेखाखंडों OA, OB, OC तथा OD खींच दीजिए। इस प्रकार बने ∠AOB और ∠COD को नापिए तथा ∠AOB - ∠COD ज्ञात कीजिए।

उपर्युक्त प्रक्रिया को अन्य दो वृत्तों के लिए भी दोहराइए और प्राप्त परिणामों को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

चित्र 13.13

वृत्त का क्रमांक	AOB	COD	AOB - COD
1.			
2.			
3.			

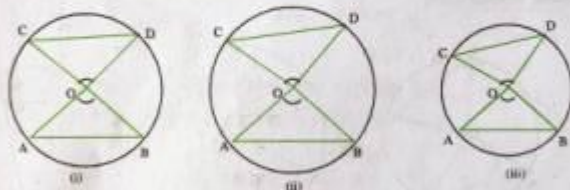
हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $\angle AOB - \angle COD$ का मान शून्य है या इतना कम है कि इसे छोड़ा जा सकता है। इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में हम कह सकते हैं कि $\angle AOB = \angle COD$

अतः इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि

किसी वृत्त में समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं।

उपर्युक्त परिणाम का विलोम

इन्हें भी करिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

चित्रानुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर तीन वृत्त खींचिए जिनकी त्रिज्याएँ भिन्न-भिन्न हों। प्रत्येक वृत्त का केन्द्र O लीजिए। पहले वृत्त केन्द्र O पर दो कोण $\angle AOB$ और $\angle COD$ इस प्रकार बनाइए कि $\angle AOB = \angle COD$ जहाँ AB तथा CD वृत्त की दो जीवाएँ हों।

चित्र 13.14

AB और CD को नापिए तथा $AB - CD$ ज्ञात कीजिए।

यही प्रक्रिया अन्य दो वृत्तों के लिए भी दोहराइए और प्राप्त परिणामों को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

वृत्त का क्रमांक	AB	CD	AB - CD
(i)			
(ii)			
(iii)			

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में $AB - CD$ का मान शून्य है या लगभग शून्य है। इस प्रकार प्रत्येक स्थिति में हम कह सकते हैं कि $AB = CD$।

किसी वृत्त में जो जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं, वे समान होती हैं।

उपर्युक्त दोनों परिणाम एक दूसरे के विलोम हैं। संक्षेप में इन्हें निम्नवत् लिखते हैं :

किसी वृत्त में समान जीवाएँ केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती हैं तथा विलोमतः वृत्त की दो जीवाएँ, जो केन्द्र पर समान कोण अन्तरित करती है, परस्पर समान होती हैं।

उदाहरण 3 : एक वृत्त का केन्द्र O है। इसके अन्तर्गत एक समबाहु ΔABC बना है। $\angle BOC$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : पार्श्व चित्र में

चित्र 13.15

$\because$ ΔABC एक समबाहु त्रिभुज है।

$\therefore$ $AB = BC = CA$

$\because$ ये तीनों भुजाएँ एक वृत्त की समान जीवाएँ हैं।

$\therefore$ प्रत्येक भुजा (जीवा) के द्वारा केन्द्र पर अन्तरित कोण समान होंगे। अर्थात् $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB$ परन्तु उपर्युक्त तीनों कोणों का योग 360^0 है।

$$\therefore \angle BOC = \angle COA = \angle AOB = \frac{360^0}{3} = 120^0$$

अतः $\angle BOC = 120^0$

अभ्यास 13(b)

चित्र 13.16

1. पार्श्व चित्र 13.16 में O वृत्त का केन्द्र है। इस वृत्त की तीन जीवाएँ AB, PQ एवं CD इस प्रकार खींची गयी हैं कि $AB = PQ = CD$।
   यदि $\angle AOB = 65^0$ तो $\angle POQ$ एवं $\angle COD$ के मान क्या होंगे ?

2. पार्श्व चित्र 13.17 में O वृत्त का केन्द्र है। यदि $\angle AOB = \angle COD$ और जीवा AB = 2.5 सेमी, तो जीवा CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3. बिन्दु O, वृत्त का केन्द्र है। वृत्त के अन्तर्गत एक वर्ग ABCD बनाया गया है। वर्ग की भुजा, वृत्त के केन्द्र पर कितने अंश का कोण अन्तरित करती है ?

चित्र 13.17

4. एक वृत्त के अन्तर्गत एक समबहुभुज बनाया गया है। यदि समबहुभुज की प्रत्येक भुजा वृत्त के केन्द्र पर 60° का कोण अन्तरित करती है, तो समबहुभुज में भुजाओं की संख्या कितनी है ?

13.2.2 चक्रीय चतुर्भुज, चक्रीय बिन्दु एवं चक्रीय चतुर्भुज के कोण :

(i) चक्रीय चतुर्भुज :

चित्र 13.18 में वृत्त के चार बिन्दुओं A, B, C तथा D को मिलाने से एक चतुर्भुज ABCD बना है, इस प्रकार के बने चतुर्भुज ABCD को चक्रीय चतुर्भुज कहते हैं।

दूसरे शब्दों में यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर हो तो वह चतुर्भुज चक्रीय चतुर्भुज कहलाता है।

चित्र 13.18

अतः

यदि किसी चतुर्भुज के चारों शीर्ष एक ही वृत्त पर हो तो वह चतुर्भुज, **चक्रीय चतुर्भुज** कहलाता है।

प्रयास कीजिए :

निम्न आकृतियों में चक्रीय चतुर्भुजों की पहचान करें।

(i) (ii) (iii)

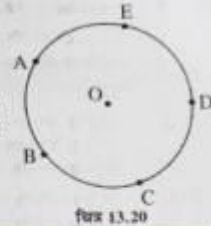
चित्र 13.19

300

चक्रीय बिन्दु :

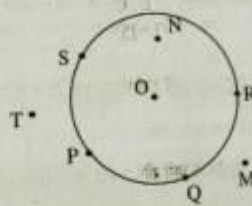
ऐसे सभी बिन्दु जो एक ही वृत्त पर स्थित होते हैं, उन्हें चक्रीय या एक वृत्तीय बिन्दु कहते हैं।

पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र है। बिन्दु A, B, C, D तथा E वृत्त पर स्थित हैं। अतः बिन्दु A, B, C, D तथा E चक्रीय बिन्दु हैं।

अतः

चित्र 13.20

किसी वृत्त पर स्थित बिन्दुओं को **चक्रीय या एक वृत्तीय बिन्दु** कहते हैं।

प्रयास कीजिए :

निम्न वृत्त में चक्रीय बिन्दुओं की पहचान करें।

चित्र 13.21

चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण :

इन्हें सोचिए और लिखिए

पार्श्व चित्र में चक्रीय चतुर्भुज ABCD में $\angle A$ के सामने के कोण तथा $\angle B$ के सामने के कोण का नाम लिखें।

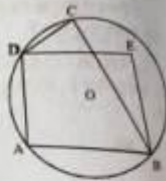
हम देखते हैं कि $\angle A$ के सामने $\angle C$ तथा $\angle B$ के सामने $\angle D$ है।

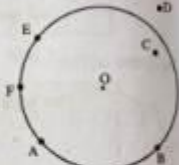
अतः $\angle A$ एवं $\angle C$, $\angle B$ एवं $\angle D$ सम्मुख कोण हैं।

चित्र 12.22

301

अभ्यास 13(c)

1. पार्श्व चित्र में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त के अन्तर्गत बने चतुर्भुजों में चक्रीय चतुर्भुज का नाम बताइए।

चित्र 13.23

2. पार्श्व चित्र में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। A, B, C, D, E तथा F बिन्दु दिये हैं। दिये गये बिन्दुओं में कौन से बिन्दु चक्रीय या एक वृत्तीय हैं ?

चित्र 13.24

3. पार्श्व चित्र में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
   (i) $\angle D$ का सम्मुख कोण बताइए।
   (ii) $\angle B$ का सम्मुख कोण बताइए।

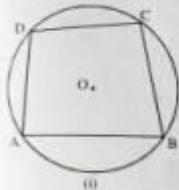
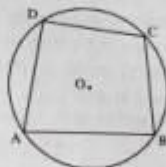
चित्र 13.25

4. पार्श्व चित्र को देखिए और निम्नलिखित कथनों में सत्य / असत्य कथन बताइए :
   (i) बिन्दु A, B, C तथा D चक्रीय बिन्दु है।
   (ii) बिन्दु A, B, C, D, तथा E चक्रीय बिन्दु नहीं है।
   (iii) बिन्दु A, B, C, D, E तथा F चक्रीय बिन्दु नहीं है।
   (iv) $\angle ABC$ का सम्मुख कोण $\angle D$ है।
   (v) चतुर्भुज BCDA एक चक्रीय चतुर्भुज नहीं है।
   (vi) चतुर्भुज ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।
   (vii) $\angle B$ का सम्मुख कोण $\angle C$ है।

चित्र 13.26

13.3 चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का योगफल

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

एक वृत्त बनाइए जिसका केन्द्र O है। इस वृत्त के अन्तर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए। इसके कोणों को मापिए और $\angle A + \angle C$ तथा $\angle B + \angle D$ ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.27

दो अन्य चक्रीय चतुर्भुजों के कोणों के साथ भी यही प्रक्रिया दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवत् सारणीबद्ध कीजिए :

चतुर्भुज का क्रमांक	$\angle A$	$\angle C$	$\angle A + \angle C$	$\angle B$	$\angle D$	$\angle B + \angle D$
(1)						
(2)						
(3)						

हम देखेंगे कि प्रत्येक बार $\angle A + \angle C$ का मान 180° है यदि यह कुछ कम अथवा अधिक है, तो यह मापन त्रुटि के कारण है।

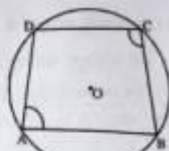
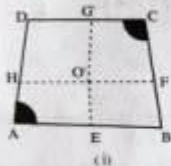
इसी प्रकार हम देखेंगे कि प्रत्येक बार $\angle B + \angle D$ का मान भी 180° है।

अतः

किसी चक्रीय चतुर्भुज में सम्मुख कोणों के प्रत्येक युग्म का योग 180° होता है।
दूसरे शब्दों में, चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।

इन्हें भी कीजिए, सोचिए तथा निष्कर्ष निकालिए

एक वृत्त खींचिए जिसका केन्द्र O है। इसके अन्तर्गत एक चतुर्भुज ABCD बनाइए। इस प्रकार ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज बन गया। $\angle A$ और $\angle C$ चतुर्भुज के सम्मुख कोणों का एक युग्म है, तथा $\angle B$ और $\angle D$ सम्मुख कोणों का दूसरा युग्म है।

अब एक ट्रेसिंग पेपर लीजिए और चतुर्भुज ABCD को ट्रेस कर लीजिए। चतुर्भुज के अन्तर्गत एक बिन्दु O लीजिए। चित्र में दिखाई गयी बिन्दुदार रेखाओं के अनुसार काट कर चारों कोणों A, B, C और D को अलग कीजिए। (चित्र-13.29(i))

अब एक रेखा l खींचिए जैसा कि चित्र 13.29(ii) में दिखाया गया है। इस रेखा पर बिन्दु P एवं Q लीजिए। $\angle A$ और $\angle C$ को बिन्दु P पर इस प्रकार रखिए कि बिन्दु A तथा C बिन्दु P पर पड़ें तथा रेखाखंड AE किरण PQ के अनुदिश और रेखाखंड CF किरण PQ के विपरीत ओर पड़ें। इस प्रकार हम देखते हैं कि रेखा AH और CG' एक दूसरे पर पड़ेंगी। हम देखेंगे कि $\angle A$ और $\angle C$ रैखिक युग्म बनाते हैं। अथवा $\angle A + \angle C = 180^\circ$।

चित्र 13.28

चित्र 13.29

यही प्रक्रिया $\angle B$ और $\angle D$ के लिए कीजिए। हम उपर्युक्त की भाँति देखेंगे कि

$\angle B + \angle D = 180^\circ$

अतः इस प्रकार हम पाते हैं कि

किसी चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं या सम्मुख कोणों का योगफल 180° होता है।

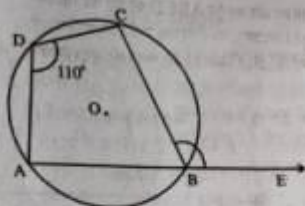
उदाहरण 4 : चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB बिन्दु E तक बढ़ाई गयी है। यदि $\angle D = 110^\circ$ तो $\angle CBE$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\because \angle D$ तथा $\angle CBA$ चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण हैं।

$\therefore \angle D + \angle CBA = 180^\circ$

या, $110^\circ + \angle CBA = 180^\circ$

या, $\angle CBA = 180^\circ - 110$

या, $\angle CBA = 70^\circ$

चित्र 13.30

$\because \angle CBA$ तथा $\angle CBE$ एक रैखिक युग्म बनाते हैं।

$\therefore \angle CBA + \angle CBE = 180^\circ$

या, $70 + \angle CBE = 180^\circ$

या $\angle CBE = 180^\circ - 70^\circ$

या $\angle CBE = 110^\circ$

इस प्रकार $\angle CBE = 110^\circ$

उदाहरण 5 : पार्श्व चित्र 13.31 में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle A = 65^\circ$ और $\angle B = 70^\circ$ तो $\angle C$ और $\angle D$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि चक्रीय चतुर्भुज के सम्मुख कोण सम्पूरक होते हैं।

$\angle A + \angle C = 180^\circ$

$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A$

$\therefore \angle A = 65^\circ$ (दिया है।)

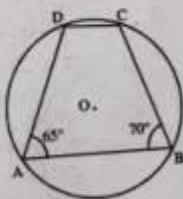
परन्तु $\angle C = 180^\circ - 65^\circ$

$\therefore = 115^\circ$

और $\angle B + \angle D = 180^\circ$

$\angle D = \angle 180^\circ - \angle B$

$\therefore = 180^\circ - 70^\circ$

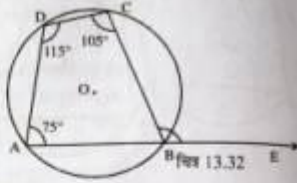
$= 110^\circ$

चित्र 13.31

अभ्यास 13 (d)

प्रश्न 1 तथा 2 में सही उत्तर दीजिए

1. पार्श्व-चित्र 13.32 में चक्रीय चतुर्भुज ABCD की भुजा AB आगे बिन्दु E तक बढ़ाई गयी है। बहिष्कोण $\angle CBE$ का मान है:

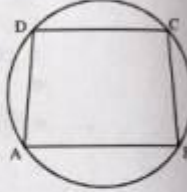
   (i) 115° (ii) 105°

   (iii) 65° (iv) 75°

चित्र 13.32

2. पार्श्व चित्र 13.33 में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज इस प्रकार है कि AB || CD निम्नलिखित कथनों को पूरा कीजिए।

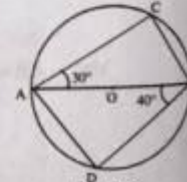
   (i) $\angle A + \angle D = 180^\circ$ क्योंकि AB || DC तथा ये .... कोण है।

   (ii) $\angle B + \angle D = 180^\circ$, क्योंकि ये कोण .... है।

   (iii) $\angle A = \angle B$ क्योंकि $\angle A + \angle D$ = ...

चित्र 13.33

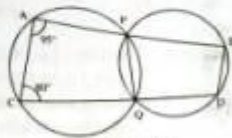
3. पार्श्व चित्र 13.34 में बिन्दु O वृत्त का केन्द्र है। यदि जीवा AC = जीवा BC तो $\angle ABC$ तथा $\angle ACB + \angle APB$ का मान ज्ञात कीजिए।

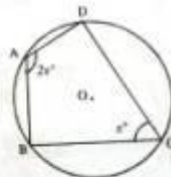
चित्र 13.34

4. पार्श्व चित्र 13.35 में वृत्त का केन्द्र O है और AOB व्यास है। वृत्त पर बिन्दु C और D इस प्रकार हैं कि $\angle CAB = 30^\circ$ और $\angle ABD = 40^\circ$; $\angle CAD$ और $\angle CBD$ के मान ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.35

5. पार्श्व चित्र 13.36 में चतुर्भुज PQRS वृत्त के अन्तर्गत बना है। यदि $\angle R = 80^\circ$ और $\angle S = 85^\circ$ तो $\angle P$ एवं $\angle Q$ के मान ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.36

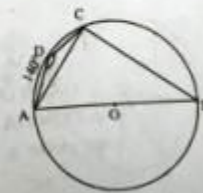
6. पार्श्व चित्र 12.37 में दो वृत्त एक दूसरे को बिन्दुओं P और Q पर प्रतिच्छेद करते हैं। चक्रीय चतुर्भुज APQC तथा BPQD इस प्रकार है कि APB तथा CQD रेखाखंड है। यदि $\angle A = 95^\circ$ और $\angle C = 80^\circ$, तो $\angle B$, $\angle D$, $\angle APQ$ एवं $\angle PQD$ ज्ञात कीजिए।

चित्र 12.37

7. पार्श्व चित्र 13.38 में ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle C = x^\circ$ और $\angle A = 2x^\circ$ तो x का मान ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.38

उदाहरण 6 : पार्श्व चित्र 13.39 में O वृत्त का केन्द्र है। ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है। यदि $\angle ADC = 140^\circ$ तो $\angle BAC$ ज्ञात कीजिए।

हल : $\because$ ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

$\therefore$ $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$

$\angle ABC + 140^\circ = 180^\circ$

चित्र 13.39

$\therefore \quad \angle ABC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

$\because$ AB वृत्त का व्यास है।

$\therefore \quad \angle ACB = 90^\circ$

अब समकोण ΔABC में

$\angle ABC + \angle BAC = 90^\circ$

$\therefore \quad \angle BAC = 90^\circ - \angle ABC$

$= 90^\circ - 40^\circ$

$= 50^\circ$

उदाहरण 7 : पार्श्व चित्र 13.40 में O वृत्त का केन्द्र है। वृत्त में दो जीवाएँ AB और CD खींची गयी हैं। इन जीवाओं के मध्यबिन्दु क्रमशः M और N हैं। यदि OM = 8 सेमी, ON = 15 सेमी और जीवा AB = 30 सेमी, तो जीवा CD की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.40

हल : $\because$ बिन्दु M, जीवा AB का मध्य बिन्दु है।

$\therefore OM \perp AB$

पुनः $\because AB = 30$ सेमी (दिया है)

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 30$ सेमी $= 15$ सेमी

अब समकोण ΔOMA में

$OA^2 = OM^2 + AM^2$

$= 8^2 + 15^2$

$= 64 + 225 = 289$

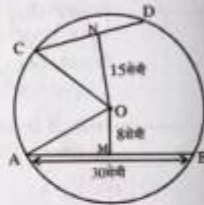
$\therefore OA = \sqrt{289} = 17$ सेमी

$\because$ OA और OC त्रिज्याएँ हैं।

$\therefore OC = OA = 17$ सेमी।

पुनः समकोण ΔONC में

$NC = \sqrt{OC^2 - ON^2}$

$= \sqrt{17^2 - 15^2}$

$= \sqrt{64} = 8$ सेमी

$\therefore$ जीवा CD $= 2NC$ ($\because$ N, जीवा CD का मध्य बिन्दु है)

$= 2 \times 8$ सेमी $= 16$ सेमी

दक्षता अभ्यास - 13

प्रश्न 1 से 3 तक सही उत्तर छाँटिए -

1. पार्श्व चित्र में O वृत्त का केन्द्र है और $OM \perp AB$ यदि AB = 10 सेमी और OM = 4 सेमी, तो त्रिज्या OA की लम्बाई है :

   (i) 5 सेमी

   (ii) 3 सेमी

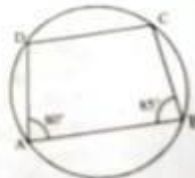
   (iii) $\sqrt{41}$ सेमी

   (iv) $\sqrt{116}$ सेमी

चित्र 13.41

2. पार्श्व चित्र 13.42में यदि $\angle A = 80^\circ$ और $\angle B = 85^\circ$ तो $\angle D$ का मान है।

   (i) 145° (ii) 85°

   (iii) 80° (iv) 95°

चित्र 13.42

3. पार्श्व चित्र 13.43 में O वृत्त का केन्द्र है। जीवा AB = जीवा CD और $\angle AOB = 70^\circ$ तो $\angle OCD$ का मान है :

   (i) 35° (ii) 55°

   (iii) 70° (iv) 110°

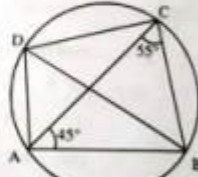
चित्र 13.43

4. पार्श्व चित्र 13.44 में O वृत्त का केन्द्र है। त्रिज्या OD, व्यास AB पर लम्ब है। यदि वृत्त पर एक बिन्दु C है, तो $\angle ABD$ और $\angle BCD$ ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.44

5. पार्श्व चित्र 13.45 में ΔABC एक समबाहु Δ है तथा D, E वृत्त पर दो बिन्दु हैं। $\angle BEC$ एवं $\angle BDC$ ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.45

6. पार्श्व चित्र 13.46 में एक वृत्त के अन्तर्गत एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD है। विकर्ण AC और BD खींचे गये हैं। यदि $\angle ACB = 55°$ और $\angle BAC = 45°$ तो $\angle ADC$ ज्ञात कीजिए।

चित्र 13.46

7. 10 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा 16 सेमी लम्बी है। केन्द्र से जीवा की दूरी ज्ञात कीजिए।

8. एक वृत्त की एक जीवा की लम्बाई उसकी त्रिज्या के बराबर है। जीवा द्वारा केन्द्र पर बने कोण का मान बताइए।

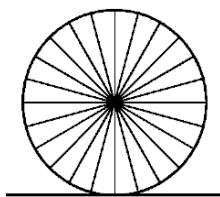
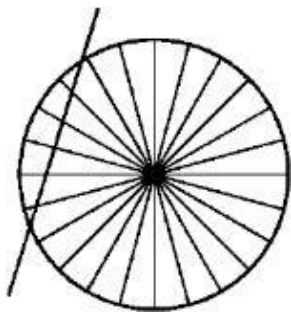
9. 2.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त के केन्द्र से 0.7 सेमी की दूरी पर एक जीवा खींचिए। इस जीवा की लम्बाई नाप कर ज्ञात कीजिए और गणना द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

10. 3.0 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। इस वृत्त की दो जीवाएँ AB और CD खींचिए जिसमें $AB = CD = 3$ सेमी। प्रत्येक जीवा द्वारा केन्द्र पर बने कोणों को नापिए। क्या दोनों कोणों के मान समान हैं ?

इकाई - 14 वŏत्त की स्पर्श रेखाएँ

- छेदिका, स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु
- किसी वŏत्त पर दिए हुए बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना, जबकि बिन्दु वŏत्त पर स्थित हो
- प्रयोगात्मक सत्यापन : स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से खाéची गयी त्रिज्या परस्पर लम्ब होती है

14.1 भूमिका

आपने सüडक पर विभिन्न प्रकार के आवागमन के साधन जōसे साईकिल, मोटर साइकिल, बस, टÈक आदि के चलते समय इनके पहियों पर अवश्य ध्यान दिया होगाý इनके पहिए वŏत्ताकार होते हैं, जो सüडक को स्पर्श करते हुए (छूते हुए) अपने गन्तव्य की ओर चलते रहते हैंý यदि आप सüडक के अनुदिश एक रेखा की कल्पना करें (चित्र 14.1) तो आपको आभास होगा कि यह रेखा पहिए रूपी वŏत्त को स्पर्श करती हुई गुजरती हैý

चित्र 14.1

चित्र 14.2

इसी प्रकार यदि एक पहिया भूमि पर पüडा है और इसके ऊपर एक छüड चित्र 14।2 के अनुसार रख दी जाय तो हमें इसका आभास होगा कि एक रेखा वŏत्त को दो बिन्दुआें पर प्रतिच्छेद करती हुई खाéची गई हैý

इस प्रकार हम पाते हैं कि कोई रेखा या तो वŏत्त को स्पर्श करती हुई गुजरती है या कोई रेखा वŏत्त के दो भिन्न-भिन्न बिन्दुआें से हो कर गुजरती हैý गणितीय भाषा में पहली प्रकार की रेखा को वŏत्त की स्पर्श रेखा तथा दूसरी प्रकार की रेखा को वŏत्त की छेदक रेखा कहते हैंý इस इकाई में हम वŏत्त की स्पर्श रेखा और छेदक रेखा से संबंधित कई विशिष्ट गुणों के बारे में अध्ययन करेंगेý

14।2 छेदिका, स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्द

प्रयास कीजिए :

अपनी अभ्यास पुस्तिका पर एक वδत्त खाéचिए और वδत्त के आस-पास भिन्न-भिन्न रेखायें खाéच कर बताइये कि भिन्न-भिन्न रेखायें वδत्त को आधिकतम व न्यूनतम कितने बिन्दुआें पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं ?

हम पाते हैं कि यदि एक ही तल में एक वδत्त और एक रेखा स्थित है, तो उनकी स्थितियों की चित्रानुसार निम्नांकित संभावनाएँ हो सकती हैंý

चित्र 14.3

1. रेखा वδत्त को दो भिन्न-भिन्न बिन्दुआें पर प्रतिच्छेद करती है, जδसा कि चित्र (i) में दिखाया गया हैý

2। रेखा, वδत्त को प्रतिच्छेद नहाé करती है, जδसा कि चित्र (ii) में दिखाया गया हैý

3। रेखा, वδत्त को केवल एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती है, जδसा कि चित्र (iii) में दिखाया गया हैý

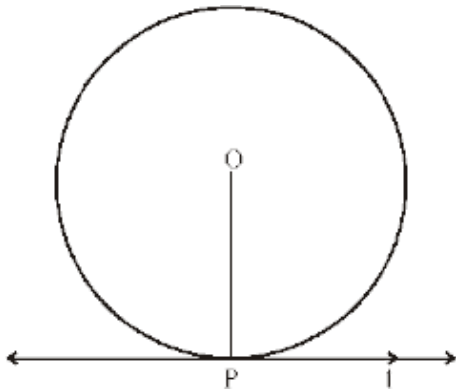
प्रथम स्थिति में रेखा, वδत्त की छेदक रेखा या छेदिका कहलाती हैý

अत: किसी वδत्त की छेदिका वह रेखा है जो उस वδत्त को दो भिन्न बिन्दुआें पर प्रतिच्छेद करती हैý तδतीय स्थिति में रेखा, वδत्त की स्पर्श रेखा कहलाती हैý

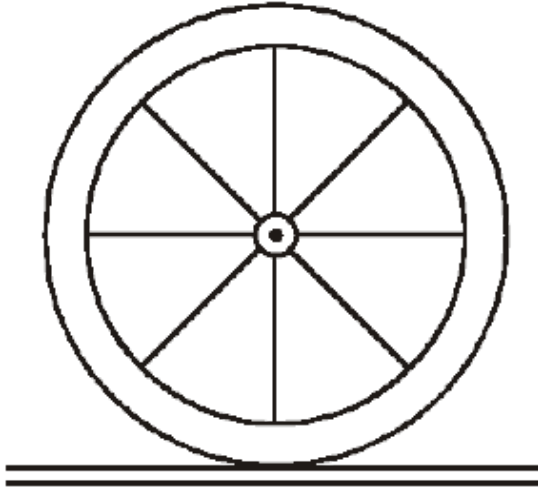
इस प्रकार

किसी वδत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है जो उस वδत्त को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैý

14।3 स्पर्श बिन्दु

किसी वδत्त की स्पर्श रेखा उस वδत्त के जिस बिन्दु से हो कर जाती है, उसे स्पर्श बिन्दु कहते हैंý स्पर्श बिन्दु, वδत्त और वδत्त की स्पर्श रेखा में उभयनिष्ठ होता हैý पार्श्व चित्र 4।4 में t स्पर्श रेखा, O वδत्त का केन्द्र और P स्पर्श बिन्दु हैंý

चित्र 14.4

प्रयास कीजिए :

वδत्त, वδत्त की स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से सम्बन्धित कुछ उदाहरण हम अपने पास-पüडोस में देख सकते हैंý जδसे रेलवे लाइन पर खüडी रेलगाüडी के पहिए को देखिएý जिसे पार्श्व में चित्र द्वारा प्रस्तुत किया गया हैý यहाú वδत्त, वδत्त की स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु को निर्धारित करेंý

चित्र 14.5

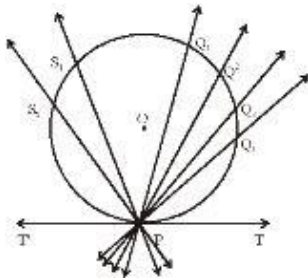
यहाú रेलगाüडी के पहिए की रिम एक वðत्त है, पटरी वðत्त की स्पर्श रेखा है और पहिया जिस बिन्दु पर पटरी को स्पर्श करता है, वह बिन्दु स्पर्श बिन्दु हैý

14ł4 छेदक रेखाआें का समूह और स्पर्श रेखा :

सोचिए, त‡र्Š करिए और लिखिए

ार्श्व चित्र 14ł6 में वðत्त का केन्द्र O हैý वðत्त पर कोई बिन्दु P हैý वðत्त के तल में P से हो कर जाने वाली रेखाआें में छेदक रेखाआें तथा स्पर्श रेखा की पहचान करेंý इन रेखाआें में से एक को छोüड कर प्रत्येक वðत्त को उसके बिन्दु P के आतिरि‡‹त एक और बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैý

इस प्रकार P से होकर जाती हुई छेदक रेखाआें का एक समूह हैý इनमें से कुछ छेदक रेखाएँ वðत्त को पिŠर से P के दाइÄ ओर Q1, Q2, Q3 तथा Q4 बिन्दुआें पर काटती हैंý जबकि कुछ अन्य छेदक रेखाएँ P के बायाé ओर S1 तथा S2बिन्दुआें पर काटती हैंý

P से होकर जाने वाली रेखाआें में से केवल एक रेखा ऐसी है, जो वðत्त को P के आतिरि‡‹त किसी अन्य बिन्दु पर नहाé काटती हैंý यह वðत्त की स्पर्श रेखा T`PT हैý

चित्र 14.6

प्रयास कीजिए:

(i) वðत्त के किसी बिन्दु से कितनी छेदक रेखायें खाéची जा सकती हैं ?

(ii) वðत्त के किसी बिन्दु से कितनी स्पर्श रेखायें खाéची जा सकती हैं ?

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए

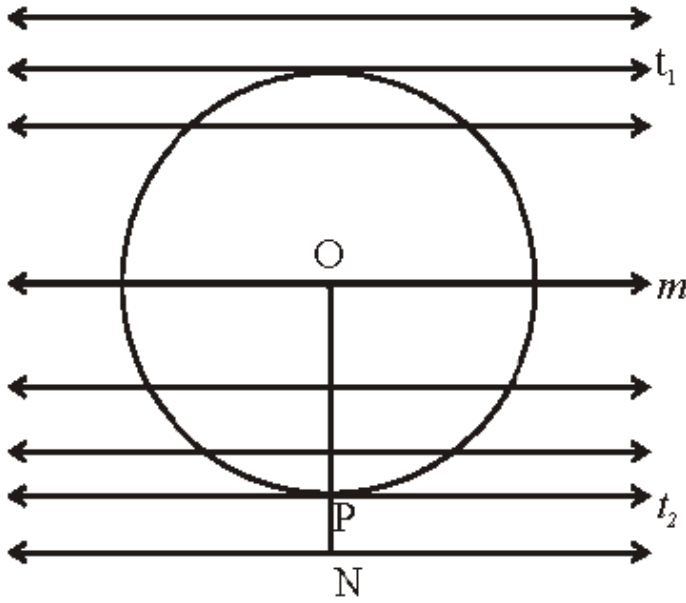
पाश्वाÄकित चित्रानुसार एक वðत्त खाéचिए जिसका केन्द्र O है, तथा पटरी और सेट स्‡‹वायर

की सहायता से चित्रानुसार समांतर रेखाएँ खाéचिए, जिसमें

चित्र 14।7

(i) दो रेखाएँ वðत्त को प्रतिच्छेद न करती हों

(ii) कुछ रेखाएँ वðत्त की छेदक रेखायें हों

(iii) दो रेखायें वðत्त की स्पर्श रेखायें होंý

इन तीनों प्रकार की एक-एक रेखा लेकर उसकी केन्द्र से दूरी सेट स्‡‹वायर की सहायता से माप कर तथा वðत्त की त्रिज्या को मापकर अपनी अभ्यास पुस्तिका पर निम्नवतd सारणीबद्ध करेंý

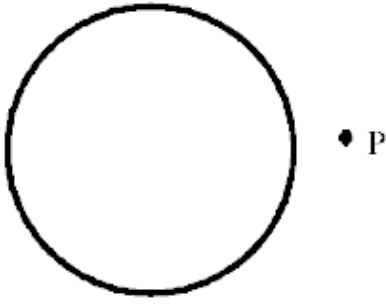
रेखाएँ	केन्द्र O से दूरी (p मानें)	(r मानें)
वृत्त को प्रतिच्छेद न करने वाली रेखा		
वृत्त की स्पर्श रेखा		
वृत्त की छेदक रेखा		

हम पायेंगे कि यदि वðत्त के केन्द्र O से इस समूह की किसी रेखा की दूरी p है, और वðत्त की त्रिज्या r है, तो

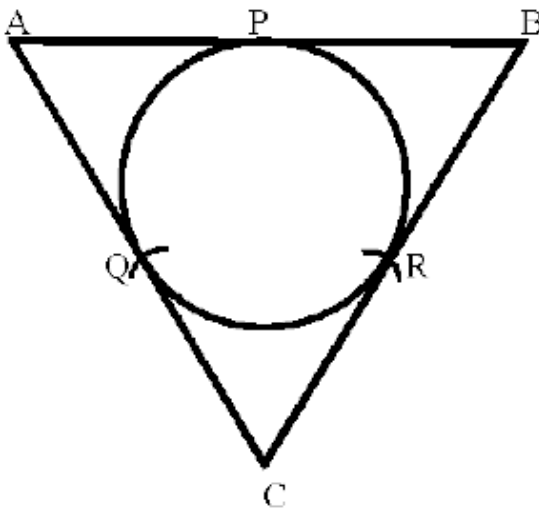
(i) यदि $p > r$ तो रेखा वðत्त को प्रतिच्छेद नहाé करती है,

(ii) यदि $p = r$ तो रेखा वðत्त की स्पर्श रेखा होती हैý

(iii) यदि $p < r$ तो रेखा वðत्त की छेदक रेखा होती हैý

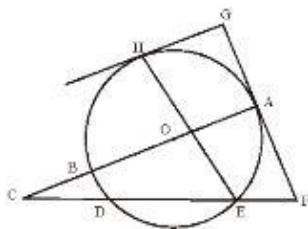
उदाहरण 1 - पार्श्व चित्र 14।8 में वðत्त के बाहर एक बिन्दु P हैý बिन्दु P से कितनी छेदक रेखायें खाéची जा सकती हैं ?

चित्र 14.8

हल : बिन्दु P से अनन्त छेदक रेखायें खाéची जा सकती हैंý (सोचिए?)

उदाहरण 2- पार्श्व आ‡ðŠति 14।9 में कितनी स्पर्श रेखाएँ हैं तथा कौन-कौन से स्पर्श बिन्दु हैं ?

चित्र 14.9

हल : तीन, स्पर्श बिन्दु P, Q तथा R हैंý

अभ्यास 14 (a)

1। पार्श्व चित्र में O वðत्त का केन्द्र है, और कुछ रेखाखण्ड खाéचे गये हैंý ज्ञात कीजिए वðत्त की

चित्र 14.10

(i) दो छेदक रेखाएँ

(ii) दो स्पर्श रेखाएँ

(iii) एक व्यास

(iv) एक स्पर्श बिन्दु और

(v) एक जीवा

2। केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वðत्त की स्पर्श रेखा t है जो वðत्त को P पर स्पर्श करती हैý यदि

रेखा t पर स्थित कोई अन्य बिन्दु Q है, तो निम्न कथनों में से सत्य अथवा असत्य कथन छाúटिए :

(i) OQ > r (ii) OQ = r

(iii) OQ < r (iv) OP < r

(v) OP = r (vi) OP > r

3. जीवा और छेदक रेखा में ‡‹या अन्तर है ? चित्र बनाकर स्पष्ट कीजिएý

4। 2।0 सेमी त्रिज्या का एक वŏत्त खाéचिएý इस वŏत्त के अभ्यन्तर एक बिन्दु P लीजिएý ज्ञात कीजिए कि ‡‹या P से होकर जाती हुई कोई ऐसी रेखा खाéची जा सकती है जो वŏत्त को स्पर्श करें ?

5। किसी वŏत्त की छेदक रेखा और स्पर्श रेखा में ‡‹या भिन्नता होती है ? चित्र खाéच कर स्पष्ट कीजिएý

6। ‡‹या व्यास वŏत्त की छेदक रेखा होती है ?

14।5 स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से खाéची गयी त्रिज्या परस्पर लम्ब होती है (प्रयोगात्मक सत्यापन)

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकलिए

भिन्न-भिन्न केन्द्रों और भिन्न-भिन्न त्रिज्याआें के तीन वŏत्त खाéचिएý सुविधा के लिए सभी वŏत्तों के केन्द्र को O से नामांकित कीजिएý

पहले वŏत्त पर एक बिन्दु P लीजिएý बिन्दु P से पटरी की सहायता से एक रेखा PT इस प्रकार खाéचिए कि PT वŏत्त के के वल एक बिन्दु से हो कर जायेý इस प्रकार प्राप्त रेखा PT वŏत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती हैý रेखाखण्ड OP खाéचिए और<OPT को नपिए तथा 90° - <OPT का मान ज्ञात कीजिएý

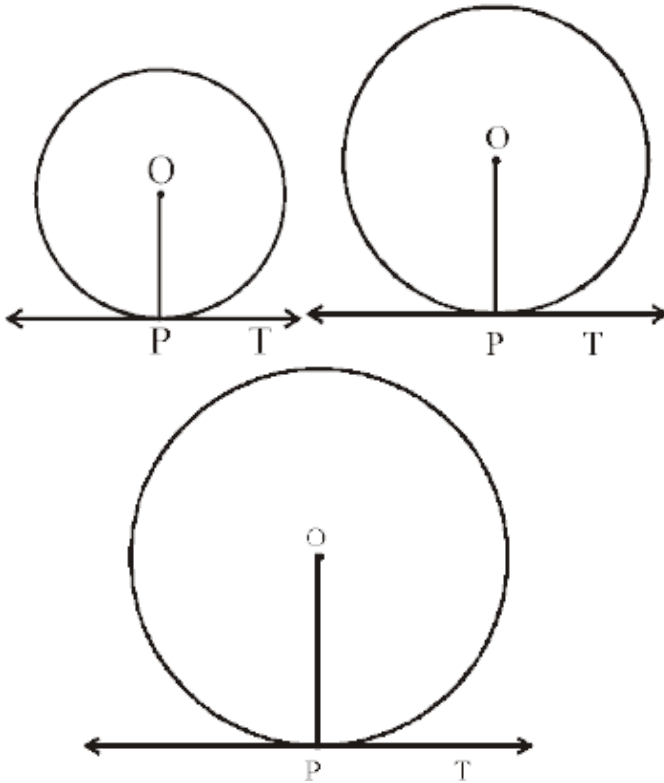
चित्र 14।11

यह प्रि%‰◌ Šया अन्य दो वðत्तों के लिए दोहराइए और प्राप्त परिणामों को निम्नवतá सूचीबद्ध कीजिएý

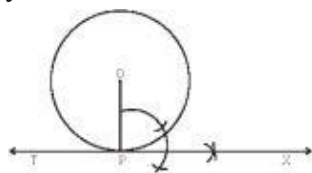
[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]		
[illegible]		
[illegible]		

हम देखेंगे कि प्रत्येक स्थिति में 90° - <OPT का मान शून्य है या लगभग शून्य हैý इस प्रकार हम इस निष्कर्ष पर पहुúचते हैं कि

वðत्त में किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा और स्पर्श बिन्दु से हो कर जाती हुई त्रिज्या परस्पर लम्ब होती हैý

सोचकर बताएँ : ‡‹या त्रिज्या OP के अन्त्य बिन्दु से P से OP पर एक से आधिक लंब रेखायें खाéची जा सकती हैं ?

14।6 किसी वðत्त पर दिये हुए बिन्दु से स्पर्श रेखा की रचना करना जब कि बिन्दु वðत्त पर स्थित हो

दिया है : केन्द्र O का एक वðत्त हैý वðत्त पर स्थित एक बिन्दु P हैý

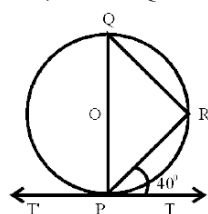
अभीष्ट : बिन्दु P से हो कर जाती हुई वðत्त की स्पर्श रेखा खाéचना जो वðत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करेý

चित्र 14.12

रचना :

1। रेखाखण्ड OP खाéच दीजिएý

2। बिन्दु P से रेखाखण्ड OP पर लम्ब PX खाéच दीजिए

3। XP को T तक बüढा दीजिएý इस प्रकार XT वðत्त की स्पर्श रेखा हुई जो वðत्त को बिन्दु P पर स्पर्श करती हैý

उदाहरण 3 : पार्श्व आ‡ðŠति में TPT केन्द्र O वाले वðत्त पर स्पर्श रेखा है तथा PQ, P से होकर जाने वाला व्यास हैý साथ ही, PR वðत्त की एक जीवा है तथा QR को मिलाया गया हैý यदि <RPT = 40° हो, तो <PQR की माप ‡‹या है ?

चित्र 14।13

हल : चूंकि PT वृत्त की P पर स्पर्श रेखा है तथा OP, P से हो कर जाने वाली त्रिज्या है,

अत: <OPT = 90^0 = <QPT

या, <QPR + <RPT = 90^0

या, <QPR = 90^0 - ∠RPT

= 90^0 - 40^0

= 50^0

चूंकि ∠PRQ अर्धवृत्त का कोण है।

अत : ∠PRQ = 90^0

,अब ∠PQR ½ãò

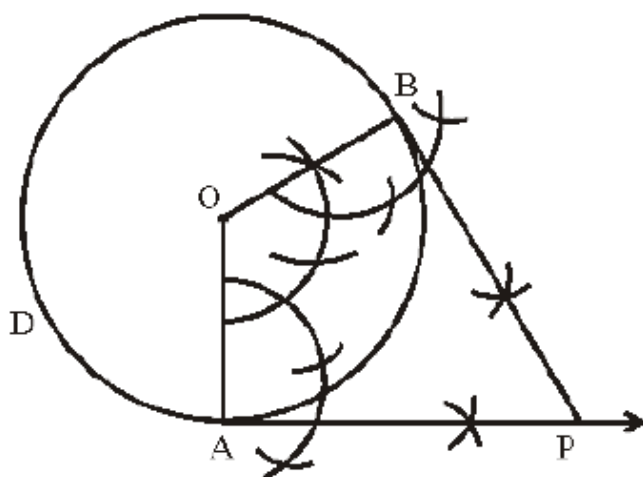
∠PQR + ∠QPR + ∠PRQ = 180^0

या, ∠PQR + 50^0 + 90^0 = 180^0

या, ∠PQR + 140^0 = 180^0

या, ∠PQR = 180^0 - 140^0 = 40^0

,अत: <PQR = 40^0

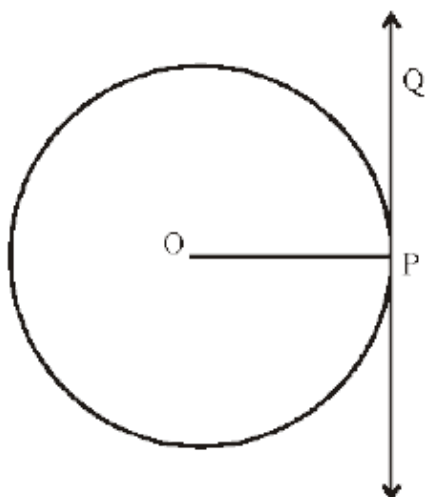
उदाहरण 4: 2.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त खींचिये। जिसका केन्द्र O है। इस वृत्त की दो त्रिज्याएँ OA और OB इस प्रकार खींचिए कि 1685.pngAOB = 1200। बिन्दुओं A और B से वृत्त की स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो एक दूसरे को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करें। PA और PB को मपिए

चित्र 14.14

हल :

रचना : O केन्द्र का एक वृत्त खींचिए जिसकी त्रिज्या 2.5 सेमी हो। एक त्रिज्या OA खींचिए। रेखाखण्ड OA के बिन्दु O पर 1200 का कोण बनअती हुई दूसरी त्रिज्या OB खींचिए। ,अब बिन्दुओं A और B से त्रिज्याओं %०ा Šमश: OA और OB पर लम्ब रेखाएँ

खाéचिए जो एक दूसरे को P पर प्रतिच्छेद करेंगीý ,अब PA और PB को मपिए जो लगभग 4।3 सेमी प्राप्त होता हैý

अभ्यास 14 (b)

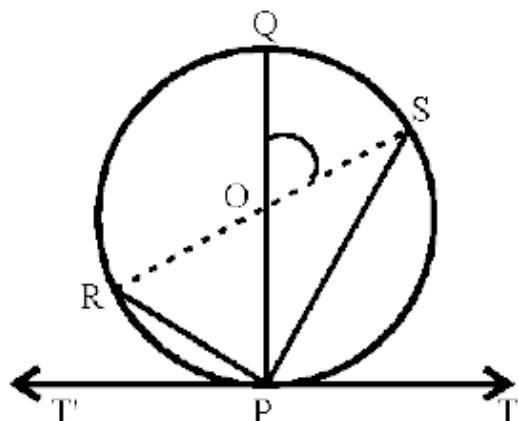
1। पार्श्व चित्र में O वðत्त का केन्द्र हैý PQ वðत्त की स्पर्श रेखा है और P स्पर्श बिन्दु हैý<OPQ का मान कितना हैý

चित्र 14।15

2। 3।0 सेमी त्रिज्या का एक वðत्त खाéचिएý वðत्त पर एक बिन्दु P लीजिएý बिन्दु P से वðत्त की स्पर्श रेखा खाéचिएý रचना भी लिखिएý

3। O केन्द्र वाला एक वðत्त हैý वðत्त पर एक बिन्दु P दिया हैý ब्अताइए कि बिन्दु P से वðत्त की कितनी स्पर्श रेखाएँ खाéची जा सकती हैý उत्तर का कारण चित्र खाéचकर स्पष्ट कीजिएý

4। किसी बिन्दु O को केन्द्र मानकर 3।0 सेमी त्रिज्या का एक वðत्त खाéचिएý चाúदा और पटरी की सहाय्अता से इस वðत्त की दो त्रिज्याएँ OA तथा OB इस प्रकार खाéचिए कि <AOB = 1250ý बिन्दुआें A और B से वðत्त की स्पर्श रेखाएँ खाéचिएý यादि दोनों स्पर्श रेखाएँ एक दूसरे को बिन्दु P पर प्रतिच्छेद करें तो <APB को नापकर लिखिएý

उदाहरण 5:पार्श्व आ‡ðŠति में PT केन्द्र O वाले वðत्त की P पर स्पर्श रेखा है, PQ वðत्त का व्यास है तथा PS एवं PR वðत्त की ऐसी जीवाएँ हैं कि $RP \perp PS$ हैý या< QOS = 620 तो (i) <QPS (ii) <SPT (iii) <QOR (iv) <RPT

ज्ञअत कीजिएý

चित्र 14.16

हल : OS तथा OR को मिलाइए

<QOS = 620

,अत<QPS = $\frac{1}{2}$ <QOS = $\frac{1}{2} \times 62^0 = 31^0$ ....(i)

चूúकि PT वðत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा है तथा PQ एक व्यास हैý

(ii) $<QPT = 90^0$

या, $<QPS + <SPT = 90^0$

या, $<SPT = 90^0 - <QPS$

या, $<SPT = 90^0 - 31^0 = 59^0$ ...... (ii)

(iii) चूúकि $RP \perp PS$ है

,अत: $\angle RPS = 90^0$

या, $<RPQ + <QPS = 90^0$

या, $<RPQ = 90^0 - <QPS$

$= 90^0 - 31^0 = 59^0$

,अत: $<QOR = 2<RPQ$

$= 2 \times 59^0$

(iv) $<RPT = <RPQ + <QPT$

$= 59^0 + 90^0$

$= 149^0$

अभ्यास 14 (C)

1। निम्नलिखि्अत कथनों में सत्य /असत्य कथन को अपनी अभ्यास पुस्तिका पर अलग-अलग करके लिŒã†ý

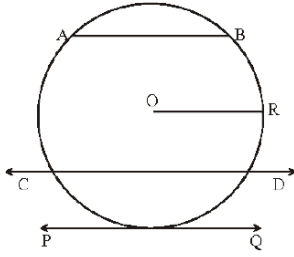
(i) वðत्त की कोई स्पर्श रेखा तथा स्पर्श बिन्दु से खाéची गयाè त्रिज्या एक दूसरे पर लम्ब होते हैंý

(ii) किसी वðत्त की छेदिका, उस वðत्त को दो से आधिक बिन्दुआ ें पर प्रतिच्छेद करती हैý

(iii) किसी वðत्त की स्पर्श रेखा, उस वðत्त को केवल दो बिन्दुआ ें पर प्रतिच्छेद करती हैý

(iv) वðत्त के केन्द्र से उसकी किसी जीवा पर खाéचा गया लम्ब, उस जीवा को समद्विभजि्अत करता हैý

2।O केन्द्र लेकर 2।5 सेमी त्रिज्या का एक वðत्त खाéचिएý इस वðत्त पर एक बिन्दु P लीजिएý त्रिज्या OP खाéचिएý रेखाखण्ड OP के बिन्दु P पर लम्ब PT खाéचिएý ‡‹या PT वðत्त की स्पर्श रेखा है ?

3। पार्श्व चित्र में O वðत्त का केन्द्र हैंý चित्र से निम्नांकित में रि‡‹त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका पर कीजिए :

चित्र 14।18

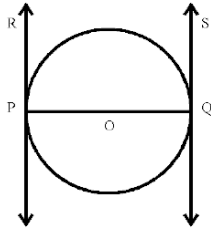
(i) रेखाखण्ड AB वðत्त की ....हैý

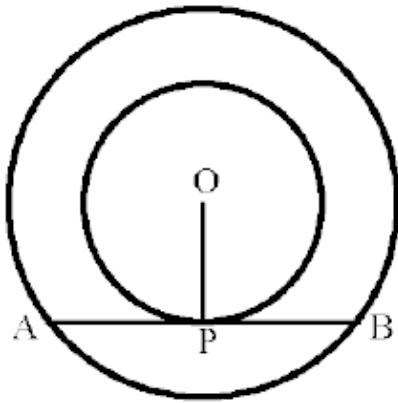
(ii) रेखाखण्ड OR वðत्त की .... हैý

(iii) रेखा CD वðत्त की................. हैý

(iv) रेखा PQ वðत्त की ....हैý

4। 2।5 सेमी त्रिज्या तथा O केन्द्र वाला एक वðत्त खाéचिएý इस वðत्त पर दो बिन्दु A और B इस प्रकार लीजिए कि 1853।pngAOB = 600 ý बिन्दुआें A और B से वðत्त की स्पर्श रेखाएँ %ृाŠमश: AP तथा BP खाéचिएý 1858।pngAPB नापकर लिखिएý

5। पार्श्व आ‡ðŠति में PQ वðत्त का एक व्यास है तथा PR एवं QS उस वðत्त की %ृाŠमश: P एवं Q पर स्पर्श रेखाएँ हैंý ‡‹या RSIIQS है? अपने उत्तर के लिए कारण भी दीजिएý

चित्र 14.19

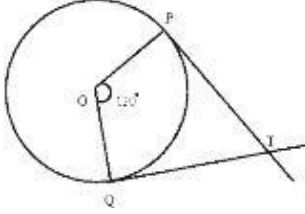
6। पार्श्व आ‡ðŠति में केन्द्र O वाले दो संकेन्द्रीय वðत्त (दोनों वðत्तों का एक ही केन्द्र O है) हैंý बüडे वðत्त की एक जीवा AB छोटे वðत्त की P पर स्पर्श रेखा हैý ‡‹या यह कहा सत्य होगा कि AB बिन्दु P पर समद्विभजि्अत होती है ? सकारण उत्तर दीजिएý

चित्र 14।20

दक्ष्अता अभ्यास 14

प्रश्न 1 में सही विकल्प को लिखिए

1। पार्श्व चित्र में O वðत्त का केन्द्र हैý इसकी दो त्रिज्याएँ OP एवं OQ इस प्रकार हैं कि <POQ = 120°ý बिन्दुआें P और Q से वðत्त की स्पर्श रेखाएँ खाéची गयाė हैंý जो एक दूसरे को T पर प्रतिच्छेद करती हैंý <PTQ का मान हैý

चित्र 14।17

(i) 60^0

(ii) 120^0

(iii) 90^0

(iv) 100^0

2. किसी वðत्त के केन्द्र के एक ओर दो समान्तर जीवाआें की लम्बाई 6 सेमी और 8 सेमी हैंý यादि वे 1 सेमी की दूरी पर हों, तो वðत्त का व्यास होगा

(i) 14 सेमी (ii) 10 सेमी (iii) 8 सेमी (iv) 5 सेमी

(एन।टी।एस। - 2006)

हमने ‡‹या चर्चा की ?

1। किसी वðत्त की छेदिका वह रेखा है जो उस वðत्त को दो भिन्न बिन्दुआें पर प्रतिच्छेद करती हैंý

2। किसी वðत्त की स्पर्श रेखा वह रेखा है, जो उस वðत्त को केवल एक ही बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैý

3। किसी वðत्त की स्पर्श रेखा उस वðत्त के जिस बिन्दु से होकर जअती है, उसे स्पर्श रेखा का स्पर्श बिन्दु कहते हैंý

4। यादि वðत्त के केन्द्र O से किसी रेखा की दूरी P है, तथा त्रिज्या r हो तो

(i) यादि $p > r$ तो रेखा वðत्त को प्रतिच्छेद नहाė करती हैं,

(ii) यादि $p = r$ तो रेखा वðत्त की स्पर्श रेखा होती हैý

(iii) यादि $p < r$ तो रेखा वðत्त की छेदक रेखा होती हैý

उत्तर माला

अभ्यास 14(a)

1।(i) AC और FC (ii) HG और GF (iii) BOA (iv) स्पर्श बिन्दु A या H (v) HE या DE

2।(i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v)सत्य (vi) असत्य 3। छात्र रचना करके स्पष्ट करेंý 4। संभव नहाė

अभ्यास 14(b)

1। 90°   4। <APB = 55°

अभ्यास 14(c)

1। (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य 2। स्पर्श रेखा 3।(i) जीवा (ii) त्रिज्या (iii) छेदक रेखा (iv) स्पर्श रेखा 4। 120° 5। समांतर 6। हाú

दक्ष्अता अभ्यास 14

1। (i) 60° 2। (ii) 10 सेमी

इकाई - 15 साँख्यिकी

अवर्गीकृत आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाना

प्रदत्त वर्गीकृत आँकड़ों को आयत चित्र द्वारा प्रदर्शित करना तथा उससे निष्कर्ष निकलवाना

अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका का अर्थ एवं गणना

बहुलक की आवश्यकता एवं गणना

15.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में आपने पढ़ा है कि हमें प्रतिदिन विभिन्न स्रोतों जैसे समाचार पत्र-पत्रिकाओं, विज्ञापनों, सूचना-तंत्र के विविध माध्यमों रेडियो, दूरदर्शन आदि से विभिन्न प्रकार की सूचनाएँ मिलती रहती हैं। इन सूचनाओं का सम्बन्ध जीवन के प्रत्येक क्षेत्र से होता है। इन सूचनाओं में से जो तथ्य संख्यात्मक रूप में एकत्र किये जाते हैं, वे आँकड़े कहलाते हैं। प्रत्येक संख्यात्मक तथ्य को प्रेक्षण या संप्रेक्षण भी कहा जाता है। मूल रूप में एकत्र किये गये ये आँकड़े अव्यवस्थित होते हैं। इन्हें अपरिष्कृत आँकड़े या कच्चे आँकड़े (Raै Daॢa) कहते हैं। आपने यह भी पढ़ा है कि आँकड़ों को समझने योग्य बनाने के लिए अथवा इनसे कोई उद्देश्यगत निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए इनको व्यवस्थित करना पड़ता है। इसके लिए आँकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखना पड़ सकता है किन्तु जब आँकड़ों की संख्या अधिक होती है, तब उनका वर्गीकरण करना पड़ता है। आपने यह भी देखा है कि आँकड़ों के आलेखीय निरूपण से उद्देश्यगत निष्कर्ष आसानी से निकाले और समझे जा सकते हैं। अब तक आपने आँकड़ों के आलेखीय निरूपण में चित्रालेख (पिक्टोग्राफ), दंडारेख (बार ग्राफ), मिश्रित दंडारेख तथा व=त्तारेख (पाईग्राफ) की अवधारणा को समझ लिया है तथा इनका निरूपण करना, इनसे निष्कर्ष प्राप्त करना सीख लिया है। साथ ही आपने अवर्गीकृत आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाना और उनका समान्तर माध्य निकालना भी सीख लिया है। अब हम इस इकाई में अवर्गीकृत आँकड़ों को समूहों या वर्ग-अन्तरालों में रख कर व्यवस्थित करना सीखेंगे, वर्गीकृत आँकड़ों का किस प्रकार आयतचित्रों (प्[ॢेदुraस्) के रूप में चित्रीय निरूपण किया जाता

है, तथा इनसे निष्कर्ष प्राप्त किये जाते हैं; इन्हें भी सीखेंगे। इनके अतिरिक्त इस इकाई में आँकड़ों के केन्द्रीय प्रव=त्ति के अन्तर्गत हम अवर्गीकृत आँकड़ों की माध्यिका और बहुलक के विषय में भी अध्ययन करेंगे।

15.2 अवर्गीकृत आंकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाना :

हम जानते हैं कि जब आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक होती है तब संख्यात्मक सामग्री को अधिक प्रभावशाली तथा साँख्यिकीय गणना हेतु इन्हें अधिक उपयुक्त रूप में प्रस्तुत करते हैं। यदि हम प्रत्येक (प्रेक्षण) आँकड़े के लिए एक बारम्बारता सारणी बनाएँ तो यह बहुत लम्बी होगी। अतः सुविधा के लिए। इन आँकड़ों को समूहों या वर्ग-अन्तरालों में रखकर व्यवस्थित करते हैं।निम्नांकित उदाहरण देखिए :

किसी विद्यालय में कक्षा 8 के शिक्षार्थियों के गणित द्वितीय प्रश्न पत्र में प्राप्तांकों का विवरण निम्नवत् है-

22, 26, 15, 7, 10, 32 , 40, 40, 25, 28, 16, 15, 35, 25, 25, 16, 20, 42,
45, 48, 10, 8, 26, 8, 1
वर्ग बनाने की विधि:
1. सबसे पहले आंकड़ों में सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्या ज्ञात करके उनका अन्तर निकालिए। इसे आंकड़ों का परिसर कहते हैं। ऊपर के उदाहरण में सबसे बड़ी संख्या 48 तथा सबसे छोटी संख्या 1 हैं अत: आंकड़ों का परिसर 48 - 1 =47 है ।
2. अब यह स्पष्ट है कि परिसर 47 को विभिन्न वर्गों में विभाजित किया जाना है। उपर्युक्त आंकड़ों के लिए 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 के समूह या वर्ग बनाइए। इन्हें वर्ग-अन्तराल भी कहते हैं। यहाँ प्रत्येक वर्ग को निश्चित करने के लिए दो संख्याएं हैं। जैसे 10-20 के वर्ग में 10 व 20 वर्ग की सीमाएँ हैं, जिसमें 10 को वर्ग की निम्न सीमा तथा 20 को वर्ग की उच्च सीमा कहते हैं। इसी प्रकार 20-30, 30-40 आदि में पहली संख्या क्रमश: 20 व 30 निम्न सीमाएँ तथा दूसरी संख्या 30 व 40 उच्च सीमाएँ हैं। वर्ग बनाते समय इस बात का ध्यान रखिए कि वर्ग एक दूसरे को अतिक्रमित न करते हों जैसे उपर्युक्त उदाहरण में वर्ग 0-10, 10-20, 20-30 आदि बनाये जाते हैं। ये वर्ग 0-10, 8-18, 20-24आदि नहीं हो सकते हैं । हम देखते हैं कि पहले वर्ग की उच्च सीमा आगे आने वाले वर्ग की निम्न सीमा होती है। जैसे 10-20 व 20-30 के वर्गों में 10-20 के वर्ग की उच्च सीमा 20 आगे के वर्ग 20-30 की निम्न सीमा है। किसी वर्ग की दोनों सीमाओं के अन्तर अर्थात् उच्च सीमा —निम्न सीमा को वर्गान्तर, वर्ग-अन्तराल या वर्ग - विस्तार या माप कहते हैं । जैसे 10 - 20 में वर्ग विस्तार 20 – 10 =10 है ।

वर्ग सीमाएँ निश्चित कर लेने के पश्चात् निम्नांकित सारणी के अनुसार चार स्तम्भ बनाइये :

क्रम संख्या	वर्ग	टैली चिह्न	बारम्बारता
(1)	(2)	(3)	(4)
1	0-10		4
2	10-20		6
3	20-30		8
4	30-40		2
5	40-50		5

सारणी - 1

3. वर्ग निश्चित करने के पश्चात टैली चिह्न लगाकर उनकी बारम्बारता ज्ञात कीजिए। पिछली कक्षाओं मे आपने टैलीचिह्न लगा कर बारम्बारता ज्ञात करना सीखा है। यहाँ यह ध्यान रखते हैं कि किसी वर्ग जैसे 0-10 में 0 के बराबर या उससे अधिक तथा 10 से कम संख्याएं लेते हैं अत: वर्ग की उच्च सीमा के बराबर की संख्या को उस वर्ग में सम्मिलित न करके उसे ठीक आगे वाले वर्ग में सम्मिलित करते हैं। जैसे संख्या 10 को 0-10के वर्ग में सम्मिलित न करके 10-20 के वर्ग में सम्मिलित करते हैं।

- अंकीय रूप में सूचनाएँ संप्रेक्षण कहलाती हैं ।
- जब संप्रेक्षित सूचनाएँ बहुत अधिक होती हैं तो आंकड़ों को वर्गों में विभाजित किया जाता है। इन वर्गों को वर्ग-अंतराल कहते हैं ।

□ध्यान दीजिए :

1. वर्ग एक दूसरे को अतिक्रमित न करते हों।
2. वर्गों के बीच में कोई रिक्ति नहीं होनी चाहिए।
3. वर्गों का आकार एक समान होना चाहिए।
4. प्रत्येक आँकड़ा किसी न किसी वर्ग में अवश्य सम्मिलित होनी चाहिए।
5. किसी सारणी में वर्गों की संख्या कम से कम 5 तथा 15 से अधिक नहीं होनी चाहिए।

उदाहरण 1 :

- नीचे दी गई तालिका को देखकर प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

क्रम संख्या	वर्ग	टैली चिह्न	बारम्बारता
(1)	(2)	(3)	(4)
1	5-10		11

2 10-15 IIII 4

3 15-20 ꟷꟷ II 12

4 20-25 ꟷꟷꟷ III 18

5 25-30 ꟷꟷ ▮▮▮▮ 14

6 30-35 III 3

7 35-40 ꟷ ꟷ 10

I इस तालिका में कितने वर्ग हैं ?
घ्घ् स्तम्भ - 2 में आँकड़ों का परिसर कितना है ?
घ्घ्घ् वर्ग 25-30 में निम्न सीमा व उच्च सीमा क्या है ?
घ्न्र् वर्ग 30-35 में वर्ग अन्तराल कितना है ?
न्र् वर्ग 35-40 में कितनी टैली लगी हैं ?
न्र्घ् किस वर्ग की बारम्बारता 10 है ?
न्र्घ्घ् संख्या 15 को वर्ग 10-15, 15-20 में से किस वर्ग में सम्मिलित किया जायेगा ?
न्र्घ्घ्घ् तालिका में कुल कितने टैली चिह्न हैं ?
घ्ू्ें तालिका में कुल बारम्बारता कितनी है ?र्
ें किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है ?
हल :

घ् तालिका में 5-10, 10-15, ..., 35-40 कुल 7 वर्ग हैं ।
घ्घ् आँकड़ों का परिसर 40-5 =35 है ।
घ्घ्घ् वर्ग 25-30 में वर्ग की निम्न सीमा 25 व उच्च सीमा 30 है ।
घ्न्र् वर्ग 30-35 में वर्ग अन्तराल 35-30 =5
न्र् वर्ग 35-40 में 10 टैली लगी हैं ।
न्र्घ् वर्ग 35-40 की बारम्बारता 10 है ।
न्र्घ्घ् संख्या 15 को वर्ग 15-20 में सम्मिलित किया जायेगा ।
न्र्घ्घ्घ् तालिका में कुल 72 टैली चिह्न हैं ।
घ्ू्ें तालिका में कुल बारम्बारता 72 है ।र्
ें वर्ग 20-25 की बारम्बारता सबसे अधिक है ।
अभ्यास 15 (a)

1. निम्नलिखित संख्याओं के 5 - 5 के वर्ग विस्तार पर वर्ग बनाइए :
(i) 5, 11, 26, 24, 21, 10, 9, 8, 7, 11, 25, 21, 17, 14, 16, 11, 13, 17
(ii) 22, 36, 42, 37, 40, 19, 23, 27, 20, 36, 40, 25, 24, 36, 23, 20

2. eिकसी परीक्षा में 22 शिक्षार्थियों के गणित विषय में प्राप्तांकों का विवरण निम्नवत् है। 10- 10 के वर्ग विस्तार में आंकड़ों को विभाजित कर बारम्बारता सारणी बनाइए :

67, 52, 54, 66, 88, 82, 67, 54, 50, 50, 66, 67, 50, 50, 48, 55, 56, 67, 88, 67, 78, 83

15.3 आयत चित्र (हिस्टोग्राम)

इसके पूर्व हम दण्ड / स्तम्भ आलेख बार ग्राफ के माध्यम से अवर्गीकृत आँकड़ों के ग्राफ बनाने की प्रक्रिया से परिचित हो चुके हैं । इनके माध्यम से हमने संख्यात्मक आंकड़ों को दण्ड (स्तम्भ) द्वारा निरूपित किया है । किन्तु यदि आंकड़े वर्गीकृत हैं और बारम्बारता बंटन दिया गया है, तो इन्हें भी ग्राफ द्वारा निरूपित किया जा सकता है। इस तरह के निरूपण को ही आयत चित्र निरूपण कहते हैं ।

इस प्रकार के निरूपण में ें-अक्ष पर वर्ग अन्तरालों को आधार मानकर आयत खींचे जाते हैं। आयतों की चौड़ाई वर्गान्तर के समानुपाती होती है। आयतों की ऊँचाई सम्बन्धित वर्ग की बारम्बारता के समानुपाती होती है ।

आइए 60 विद्यार्थियों द्वारा विज्ञान में पूर्णांक 60 में प्राप्त अंकों के वर्गीकृत बारम्बारता बंटन पर विचार करें।

वर्ग अन्तराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	योग
बारम्बारता	2	8	16	18	12	4	60

उपरोक्त को निम्न आलेख के रूप में निरूपित करके प्रदर्शित किया जाता है। देखिए यह आलेख उन आलेखो से भिन्न है जो आपने पिछली कक्षाओं में खींचे थे। यहाँ आलेख में क्षैतिज अक्ष में वर्ग अन्तरालों को निरूपित किया गया है। दंड की लम्बाई वर्ग-अन्तराल की बारम्बारता दर्शाती हैं और दण्डों के बीच में कोई रिक्तता नहीं ंहै क्योंकि वर्ग अन्तरालों के बीच में कोई रिक्तता नहीं है।

आँकड़ों के इस प्रकार का आलेखीय निरूपण एक आयत चित्र (प्[ृदुraस्) कहलाता है।

उदाहरण 2. निम्नांकित बारम्बारता बंटन के आधार पर आयत चित्र बनाइए :

वर्ग	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
बारम्बारता	40	30	60	45	20	5

(1) «eeheâ heshej hej keâesF& **बिन्दु** O ueskeâj OX (x-De#e) leLee OY (y-De#e) KeerbefÛeS~yeejcyeejlee

70
30
20
10
60
50
40
0

30 40 50 60 70 80 90

वर्गान्तर

पैमाना :र्
े अक्ष पर : 1 सेमी = 10 वर्गान्तर
ब् अक्ष पर : 1 सेमी = 10 बारम्बारता

(क्षैतिज अक्ष में टेढ़ी-मेढ़ी रेखा यह दर्शाने के लिए प्रयोग की गई है कि हम 0 से 30 तक की संख्याएँ प्रदर्शित नहीं कर रहे हैं।)

(2)र् े- अक्ष पर कोई उपयुक्त पैमाना 1 सेमी (10 छोटे खाने) ·10 वर्गान्तराल लेकर सभी वर्गों 30-40, 40-50, ..., 80-90 को प्रदर्शित कीजिए ।

(3) ब्-अक्ष पर कोई उपयुक्त पैमाना 1 सेमी =10 बारम्बारता लेकर सभी बारम्बारता 10, 20, 30, ..., 60 को प्रदर्शित कीजिए ।

(4)र् े-अक्ष पर पहला वर्ग 30-40 है जिसका वर्ग-अन्तराल 10 है, इसे आयत की एक भुजा बनाएं। ब्-अक्ष पर इस वर्ग की बारम्बारता 40 है, इस ऊँचाई को आयत की दूसरी भुजा बनाइए। अब वर्ग 30-40 पर एक आयत खांrचिए ।

(5) इसी प्रकार वर्ग 40-50 के बीच की दूरी को आयत की एक भुजा तथा इसकी बारम्बारता 30 की ऊँचाई को आयत की दूसरी भुजा मानकर आयत खींचिए। वर्ग 30-40 व वर्ग 40-50 के आयत एक दूसरे से सटे हुए होंगे ।

(6) इसी प्रकार अन्य सभी वर्गों के लिए आयत चित्र खांrचिए। यही अभीष्ट आयत चित्र होगा।

उदाहरण 3. नीचे दी गई सारणी 25 में शिक्षार्थियों द्वारा किसी परीक्षा में पूर्णांक 50 में से प्राप्त अंकों का विवरण दिया गया है जिसको आयत चित्रों द्वारा प्रदर्शित किया गया है। आयत चित्रों को देखकर प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

7

0 10 20 30 40 50 60

वर्गान्तर

2861.ज्हु

2863.ज्हु
2862.ज्हु
पैमाना :र्
े अक्ष पर : 1 सेमी = 10 वर्गान्तर
ब् अक्ष पर : 1 सेमी = 2 बारम्बारता
2890.ज्हु
2889.ज्हु

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
बारम्बारता	2	3	7	8	5

i . सारणी में वर्गों का वर्ग-अन्तराल कितना है ?
ग्ग्. आयत चित्रों में 10 से कम अंक पाने वाले कितने शिक्षार्थी हैं ?
ग्ग्ग्. कितने शिक्षार्र्थियों ने 19 से अधिक और 30 से कम अंक प्राप्त किये हैं ।
ग्र्. सबसे कम प्राप्तांकों का वर्ग कौन-सा है ?
न्. सबसे कम बारम्बारता का वर्ग-अन्तराल कौन-सा है ?
हल : ग् . सारणी में वर्ग 0-10, 10-20 ... आदि हैं अतः वर्ग-अन्तराल 10 है ।
ग्ग्. 2 शिक्षार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं ।
ग्ग्ग्. 7 शिक्षार्थियों ने 19 से अधिक तथा 30 से कम अंक प्राप्त किये हैं ।
ग्र्. वर्ग 0-10 सबसे कम प्राप्तांकों का वर्ग है ।
न्. वर्ग 30-40 सबसे अधिक बारम्बारता वाला वर्ग है ।
उदाहरण 4: नीचे दिये गये आयत चित्रों द्वारा किसी कक्षा के 50 शिक्षार्थियों द्वारा अर्जित प्राप्तांक प्रदर्शित किये गये हैं ।

बारम्बारता

10
3
2
1
11
5
4
6
8
7
9

0 10 20 30 40 50 60 70 80

प्राप्तांक

पैमाना :र्

े अक्ष पर : 1 सेमी = 10 प्राप्तांक
ब् अक्ष पर : 1 सेमी = 2 बारम्बारता
आयत चित्रों को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :
ग् . वर्ग विस्तार कितना है ?
गग्. कितने शिक्षार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं ?
गग्ग्. कितने शिक्षार्थियों ने 40 से अधिक तथा 50 से कम अंक प्राप्त किये हैं ?
ग्न्. किस वर्ग-अन्तराल की बारम्बारता सबसे अधिक है, तथा उसमें कितने शिक्षार्थी हैं ? न्. यदि उत्तीर्ण होने के लिए 40 अंक आवश्यक हैं तो अनुत्तीर्ण होने वाले कितने शिक्षार्थी हैं ?
हल :
ग् . आयत चित्रों में वर्ग-अन्तरालों 0-10, 10-20 आदि में वर्ग विस्तार 10 है ।
गग्. 10 से कम अंक प्राप्त करने वाले शिक्षार्थी 0-10 के वर्ग-अन्तराल में पड़ते हैं जिसकी ऊँचाई 1 बारम्बारता के बराबर है। अतः 1 शिक्षार्थियों ने 10 से कम अंक प्राप्त किया है।
गग्ग्. 40 या उससे अधिक तथा 50 से कम अंक प्राप्त करने वाले शिक्षार्थियों की संख्या 9 है ।
ग्न्. 50-60 के वर्ग-अन्तराल की बारम्बारता सबसे अधिक है। इसमें 10 शिक्षार्थी हैं ।
न्. 40 से कम प्राप्तांक वाले शिक्षार्थी वर्ग-अन्तराल 0-10, 10-20, 20-30, तथा 30-40 के वर्गों में आते हैं। अतः अनुत्तीर्ण होने वाले शिक्षार्थी 18 हैं ।
 ध्यान दीजिए :
आयत चित्र (हिस्टोग्राम) वर्गीकृत आँकड़ों का चित्रात्मक प्रदर्शन होता है। इस आयत को वर्ग-अन्तरालों को आधार तथा उनकी संगत बारम्बारता को ऊँचाई मानकर बनाया जाता है।

ध्यान दीजिए कि यदि प्रथम वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा का मान बहुत अधिक हो तो ग्राफ के आकार को छोटा करने के लिए े-अक्ष पर मूल बिन्दु तथा पहले अन्तराल के बीच में थोड़ा स्थान छोड़ देते हैं। इस स्थान को टेढ़ी-मेढ़ी रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हैं। उदाहरण-1 में प्रथम वर्ग-अन्तराल की निम्न सीमा 30 है, अतः यदि हम चाहें तो े-अक्ष पर मूल बिन्दु तथा 30 के बीच की दूरी को इस विधि का प्रयोग कर कम कर सकते हैं।

शिक्षार्थियों की संख्या
उँâचाई (सेमी में)

पैमाना :र्
े अक्ष पर : 1 सेमी = 5 सेमी
ब् अक्ष पर : 1 सेमी = 2 शिक्षार्थी

अभ्यास 15 (ं)
1. नीचे दिये शिक्षार्थियों की ऊँचाई के आयत चित्रों को देखकर प्रश्नों का उत्तर दीजिए :
I . सबसे अधिक शिक्षार्थी किस उँâचाई वर्ग में हैं ?
घ्घ्. 160-165 सेमी की ऊँचाई के शिक्षार्थियों की कितनी संख्या है ?
घ्घ्घ्. 160 सेमी से कम ऊँचाई के कितने शिक्षार्थी हैं ?
घ्न्. सबसे कम शिक्षार्थी किस ऊँचाई वर्ग में हैं ?
न्. 155 सेमी या उससे अधिक की उँâचाई के कितने शिक्षार्थी हैं ?

2. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन सारणी में 60 शिक्षार्थियों के प्राप्तांक दिये गये हैं।

प्राप्तांक 0-10 10-20 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70 70-80

शिक्षार्थियों की संख्या 2 4 5 8 12 15 9 5

आँकड़ों को आयत चित्रों द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

3. नीचे दी गयी सारणी में किसी लघु उद्योग में कार्यरत कामगारों की आयु तथा उनकी संख्या दी गई है-

आयु (वर्षों में)25-30 30-35 35-40 40-45 45-50 50-55

कामगारों की संख्या 40 60 80 70 60 50

इन आँकड़ों को आयत चित्रों द्वारा निरूपित कीजिए।

शिक्षार्थी

16
12
24
20
8
4
0 125 130 135 140 145 150 155 160

उँâचाई (सेमी में)

पैमाना - ऊँचाईर्
 े अक्ष पर 1 सेमी = 5 सेमी
ब् अक्ष पर 1 सेमी = 4शिक्षार्थी

3094.ज्हु
4. कक्षा 8 के शिक्षार्थियों की उँâचाई सेमी में तथा उनकी बारम्बारता (स्ांख्या) के निम्नांकित आयत चित्र को देखकर प्रश्नों का उत्तर दीजिए-
घ् . वर्ग-अन्तरालों में वर्ग विस्तार कितना है ?
घ्घ्. सबसे कम बारम्बारता किस वर्ग-अन्तराल की है ।

घ्घ्. 140 सेमी से कम ऊँचाई के कितने शिक्षार्थी हैं ?

घ्न्. सबसे अधिक बारम्बारता का वर्ग अन्तराल कौन सा है तथा उसकी बारम्बारता कितनी है ?

न्. 145 सेमी या उससे अधिक तथा 155 सेमी तक की ऊँचाई के कितने शिक्षार्थी हैं ?

5. नीचे दिये गये बारम्बारता बंटन को आयत चित्रों द्वारा प्रदर्शन कीजिए :

माप 0-10 10-20 20-30 30-40 40-50 50-60

बारम्बारता 2 8 15 20 16 6

15.4 केन्द्रीय प्रव=त्ति की माप

दिये गये आँकड़ों में एक ऐसी संख्या होती है, जो समस्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करती है । यह संख्या प्राय: समूह के मध्य या उसके आस-पास की संख्या होती है । इसी संख्या के आस-पास सभी आँकड़े वितरित होते हैं । आँकड़ों की इस प्रव=त्ति को केन्द्रीय प्रव=त्ति कहते हैं तथा वह संख्या (माध्य) जिसके आस-पास सभी आँकड़े, वितरित होते हैं 'केन्द्रीय प्रव=त्ति की माप' कहलाती है ।

हम जानते हैं कि केन्द्रीय प्रव=त्ति की मापें तीन प्रकार की होती हैं । समान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक। समान्तर माध्य के विषय में हम कक्षा-7 में पढ़ चुके हैं । यहाँ पर हम माध्यिका एवं बहुलक के बारे में अध्ययन करेगें ।

15.4.1 माध्यिका

मान लिया किसी कक्षा के 5 शिक्षार्थियों के भार क्रमशः 48, 54, 42, 56 और 51 किग्रा हैं। इन सभी शिक्षार्थियों को भार के आरोही क्रम में यदि खड़ा किया जाय तो इनके भार का क्रम 42, 48, 51, 54और 56 किग्रा होंगे। इसी प्रकार यदि उन्हें भार के अवरोही क्रम में खड़ा किया जाय तो उनके भार का क्रम 56, 54, 51, 48 और 42 किग्रा होंगे। दोनों स्थितियों में वह शिक्षार्थी पंक्ति के ठीक मध्य में खड़ा होगा जिसका भार 51 किग्रा है । भार के आरोही क्रम में खड़ा होने की दशा में मध्यस्थ शिक्षार्थी के पूर्व के दो शिक्षार्थियों के भार उससे कम होंगे तथा बाद के दो शिक्षार्थियों के भार उससे अधिक होंगे। इसी प्रकार जब शिक्षार्थी भार के अवरोही क्रम में खड़े होंगे तो मध्यस्थ शिक्षार्थी के पूर्व के दो शिक्षार्थियों के भार उससे अधिक तथा बाद के दो शिक्षार्थियों के भार उससे कम होंगे। माध्यिका दिये गये प्रेक्षणों में वह मान होता है जो प्रेक्षणों को ठीक दो भागों में बाँटता है।

ध्यान दीजिए :

यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाय, तो मध्य में पड़ने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।

इससे यह भी स्पष्ट होता है कि माध्यिका दिये गये आँकड़े को दो समूहों में विभाजित करती है जिसमें आंकड़ों के आरोही क्रम में व्यवस्थित होने की दशा में

पहले समूह के प्रत्येक पद का मान माध्यिका से कम तथा दूसरे समूह के प्रत्येक पद का मान माध्यिका से अधिक होता है।

सोचिए, समझिए और बताइए :

यदि आँकड़ों को अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया गया है तो माध्यिका के पूर्व के पदों का मान माध्यिका से अधिक होंगे या कम ?

माध्यिका ज्ञात करना :

(a) जब आंकड़े अवर्गीकृत तथा विषम संख्या में हों :

अवर्गीकृत आंकड़े जब विषम संख्या में होते हैं, तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले उन्हें आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं। इसके पश्चात् इन आंकड़ों के बीच का पद ज्ञात कर लेते हैं। बीच का पद ज्ञात करने के लिए कुल पदों की संख्या में 1 जोड़कर उसे 2से भाग दे देते हैं। इस प्रकार मध्य पद प्राप्त हो जाता है। मध्य पद का मान ही माध्यिका होता है।

वुâल पदों की सख्या ± 1

अर्थात् माध्यिका · 4052.ज्हु वाँ पद

2

यदि पदों की संख्या n विषम है, तो माध्यिका · $\frac{n+1}{2}$ वें पद का मान

उदाहरण के लिए यदि n=13 है, तो $\frac{8}{3}$ वें अर्थात 7वें प्रेक्षण का मान, माध्यिका होगा।

उदाहरण 7: सात ाqशक्षार्थियों की सेमी में ऊँचाई के आंकड़े निम्नवत् हैं :

148, 151, 153, 145, 143, 152, 155

इनकी माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

हल : आँकड़ों का आरोही क्रम है- 143, 145, 148, 151, 152, 153, 155

अतः माध्यिका का पद · $\left(\frac{-6}{9}\right)$ वाँ पद =चौथा पद

अर्थात् माध्यिका =151 सेमी

(ं) जब आँकड़ें अवर्गीकृत तथा सम संख्या में हों-

यदि किसी समूह में 4079.ज्हु सम पद हैं तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले आंकड़ों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में रखते हैं। इसके पश्चात् बीच के दोनों पदों के मान के योग को 2 से भाग देकर माध्यिका ज्ञात करते हैं ।

$\frac{2\ 9}{5\ 4}$वें पद का मान ± $\left(\frac{n}{2}+1\right)$वें पद का मान

अतः माध्यिका · ______________________

2

उदाहरण : विद्यालय की बास्केट बाल टीम द्वारा 10 मैचों में प्राप्त अंक निम्नवत है

10, 12, 8, 9, 11, 19, 13, 10, 20, 22

मैच के अंकों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।
हल : मैच के अंकों के आंकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर :
आरोही क्रम में है : 8, 9, 10, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 22
यहाँ n = 10, पद सम संख्या में हैं।

$\frac{n}{2}$वें पद का मान ± $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें पद का मान
माध्यिका · ________________________
2
5 वें पद का मान ± 6 वें पद का मान
·
2

= 11.5
अर्थात् माध्यिका =11.5
(म) जब आँकड़ें अवर्गीकृत हों, परन्तु सारणीबद्ध हों
इस प्रकार के आँकड़ों में पदों की बारम्बारता दी हुई रहती है । ऐसी स्थिति में पहले संचयी बारम्बारता ज्ञात करते हैं। किसी पद की संचयी बारम्बारता ज्ञात करने के लिए उस पद की बारम्बारता में उसके पूर्ववर्ती समस्त पदों की बारम्बारताएँ जोड़ दी जाती हैं । ध्यान दें, अंतिम पद की संचयी बारम्बारता का मान कुल पदों की बारम्बारताओं के योग के बराबर होता है ।

उदाहरण 1. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन की माध्यिका ज्ञात कीजिए :
पद 2 4 6 8 10 12 14
बारम्बारता 3 2 2 4 3 12

हल : आँकड़ों की संचयी बारम्बारता सारणी निम्नवत् है :

पद बारम्बारता संचयी बारम्बारता

2 3 3
4 2 (3+2) = 5
6 2 (5+2) = 7
8 4 (7+4) = 11
10 3 (11+3) = 14
12 1 (14+1) = 15
14 2 (15+2) = 17
योग 17

यहाँ ह =17 अर्थात् पदों की संख्या विषम है।

अत: माध्यिका · $\frac{n+1}{2}$ वाँ पद

· $\frac{17+1}{2}$ · 9 वाँ पद

9 वाँ पद उस वर्ग में होगा जिसकी संचयी बारम्बारता 11 है और 11 संचयी बारम्बारता का पद मान 8 है।

अतः 9 वें पद का मान =8

4126.ज्हु माध्यिका =8

उदाहरण 2. किसी कक्षा के 24शिक्षार्थियों की (वर्षों में) आयु के आंकड़े निम्नलिखित हैं :

आयु (वर्षों में)12 13 14 15 16

शिक्षार्थी 4 5 4 6 5

आंकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त बारम्बारता बंटन की संचयी बारम्बारता सारणी निम्नवत् है :

आयु (वर्षों में) बारम्बारता संचयी बारम्बारता

12 4 4

13 5 (4+5) = 9

14 4 (9+4) = 13

15 6 (13+6) = 19

16 5 (19+5) = 24

यहाँn= 24,अर्थात् पदों की संख्या सम है। इससे माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले $\frac{n}{2}$वाँ पद तथा $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद ज्ञात करना है ।

$\frac{n}{2}$वाँ पद · $\frac{24}{2}$ वाँ पद

· 12 वाँ पद

$\left(\frac{n}{2}+1\right)$वाँ पद · $\left(\frac{24}{2}+1\right)$वाँ पद · 13 वाँ पद

12 वें पद का मान ± 13 वें पद का मान

माध्यिका ·

2

· $\frac{14+14}{2}$ · 14 वर्ष (क्योंकि दोनों पद उस स्तम्भ में हैं जिसकी संचयी बारम्बारता 14है)

सामूहिक चर्चा करें

1. प्राकृतिक संख्याओं 8, 12, 9, 15 का आरोहीr-क्रम बताइए ।

2 . 20, 24, 28, 19 का अवरोही-क्रम क्या है ?

3. आँकड़ों 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15 की माध्यिका बताइए ।
4. आँकड़ों 15, 12, 10, 9, 6 की माध्यिका क्या है?
5. छह मित्रों के भार क्रमशः 40 किग्रा, 43 किग्रा, 44किग्रा, 46 किग्रा, 47 किग्रा और 50 किग्रा हैं। उनके भारों की माध्यिका बताइए ।

अभ्यास 15 (म)

1. एक विद्यालय के 7 अध्यापकों की आयु (वर्षों में) 25, 57, 32, 23, 42, 30, 47 है । आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

2. ाIqकसी कक्षा की 8 बालिकाओं की ऊँचाई सेमी में क्रमशः 140, 142, 135, 133, 137, 150,
148 तथा 138 है। आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

3. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए :

पद3 4 6 8 12

बारम्बारता 2 5 4 5 3

4. निम्नलिखित सारणी में 40 शिक्षार्थियों के जूतों की नाप के नम्बरों के आँकड़े दिये गये हैं :

जूतो की नाप (नम्बर)4 5 6 7 8

शिक्षार्थियों की संख्या 6 5 8 15 6

माध्यिका ज्ञात कीजिए ।

15.4.2 बहुलक

किसी कक्षा के 10 शिक्षार्थियों की आयु (वर्षों में) क्रमशः 13, 14, 13, 15, 12, 13, 15, 16, 13, 13 है। इन आँकड़ों को हम निम्नलिखित प्रकार से भी रख सकते हैं ।

प्राप्तांक
4895.ज्हु

पैमाना -र्
े अक्ष पर : 1 सेमी = 10 प्राप्तांक
ब् अक्ष पर :1 सेमी = 2 शिक्षार्थी
4903.ज्हु

आयु (वर्षों में**)** 12 13 14 15 16

बारम्बारता 1 5 1 2 1

हम देखते हैं कि 10 शिक्षार्थियों में 5 शिक्षार्थी ऐसे हैं जिनकी आयु 13 वर्ष है। अत: हम कह सकते हैं कि आँकड़ों का बहुलक 13 वर्ष है, क्योंकि बहुलक का अर्थ है सर्वाधिक

बारम्बारता वाला आँकड़ा ।

fिदये गये आंकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं । अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है वह पद बहुलक कहलाता है ।

बहुलक की आवश्यकता

बहुलक के ज्ञान की आवश्यकता व्यापार या उद्योग जगत में बहुत अधिक है । बड़े पैमाने पर व्यापार के लिए माल बनाने वालों या व्यापारियों के लिए बहुलक का महत्व अत्यधिक है । किसी पैâक्टरी में उस नाप की बनियान अधिक बनाई जाएगी जिनकी बाजार में माँग अधिक होगी। विव्रेâता भी अपनी दुकान में उसी नाप की बनियान या अन्य रेडीमेड कपड़े अधिक संख्या में रखता है जिसकी बिक्री अधिक होगी।

इसी प्रकार जूते की दुकान पर उस माप के जूते सबसे अधिक संख्या में होंगे जो अधिकतर व्यक्तियों के पैरों की माप है। यह माप ही बहुलक है।

बहुलक प्रेक्षण मात्र से ज्ञात किया जा सकता है ।

बहुलक ज्ञात करने की विधि (जब आँकड़े अवर्गीकृत हों)

उदाहरण 1: 10 विद्यार्थियों द्वारा (15 में से) प्राप्त किये गये निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

9, 10, 12, 10, 13, 12, 10, 12, 10, 9

हल : इसमें 10 की बारम्बारता सबसे अधिक है अत: इसका बहुलक 10 है ।

उदाहरण 2. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए :

पद 12 16 20 24 28

बारम्बारता 4 10 14 20 6

यहाँ यह स्पष्ट है कि 24की बारम्बारता सबसे अधिक 20 है। अत: इसका बहुलक 24है ।

टिप्पणी- कभी-कभी ऐसे भी बारम्बारता बंटन प्राप्त होते हैं जिनमें अधिकतम बारम्बारता वाले पद एक से अधिक होते हैं। ऐसी स्थिति में हम समूहन विधि से बहुलक प्राप्त करते हैं। इस कक्षा में इस विधि का अध्ययन अपेक्षित नहीं है ।

अभ्यास 15 (ृ)

1. 12, 12, 13, 12,10 का बहुलक बताइए ।

2. निम्नलिखित आंकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए ::

(i) 13, 14, 10, 12, 11, 12, 13, 20, 18, 12, 10, 12

(ii) 19, 25, 36, 38, 20, 18, 38, 3, 38, 22, 38, 38

3. निम्नलिखित बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए :

पद18 22 26 30 34 38

बारम्बारता 3 5 11 3 9 2

दक्षता अभ्यास 15

1. निम्नलिखित आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात कीजिए :

(i) 23, 20, 22, 19, 17, 22, 14, 16, 15
(ii) 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18
(iii) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10
2. निम्नलिखित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए :

पद 4 7 10 12

बारम्बारता 5 8 10 1
3. निम्नलिखित सारणी में 40 शिक्षार्थियों की आयु (वर्षों में) दी हुई हैं । माध्यिका ज्ञात कीजिए।
वय (वर्षो में)10 12 14 16 18

efMe#eeefLe&ÙeeW keâer mebKÙee 4 8 12 6 10

4. निम्नलिखित आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए :
(i) 1, 3, 5, 5, 5, 4, 6
(ii) 2, 4, 6, 3, 4, 3, 4, 4, 7, 2
(iii) 5, 7, 9, 8, 7, 9, 7, 7, 3, 5, 2

5. विश्व हाथ धुलाई दिवस पर आयोजित प्रतियोगिता में विद्यालय के बच्चों द्वारा साबुन से हाथ धोने में लगा समय (सेकण्ड) निम्नलिखित हैं :-।
20, 25, 20, 17, 15, 13, 17, 19, 20, 21, 25, 20, 15, 23
आँकड़ों का बहुलक ज्ञात कीजिए
6. नीचे दिये गये आयत चित्रों में 60 शिक्षार्थियों का प्राप्तांक विवरण दर्शाया गया है :
ऊपर के आयत चित्रों को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दीजिए :
ग्. वर्ग-विस्तार कितना है?
ग्ग्. कितने शिक्षार्थियों ने 40 से कम अंक प्राप्त किये?
ग्ग्ग्. 50-60 के मध्य प्राप्तांक कितने शिक्षार्थियों के हैं?
ग्र्. 50 से अधिक अंक प्राप्त करने वाले कितने शिक्षार्थी हैं?
न्. 10 से अधिक तथा 30 से कम प्राप्तांक वाले कितने शिक्षार्थी हैं?

7. किसी कक्षा के 30 शिक्षार्थियों ने गणित में निम्नलिखित अंक प्राप्त किये :

25, 22, 28, 30, 35, 25, 20, 42, 45, 48, 41, 42, 25, 23, 35, 36 37, 38, 30, 21, 25, 23, 28, 25, 25, 24, 23, 48, 29, 30

5 के वर्ग-अन्तराल से आँकड़ों की बारम्बारता सारणी बनाइए। पहला वर्ग-अन्तराल 20 से प्रारम्भ कीजिए।

8. किसी कारखाने में काम करने वाले कर्मचारियों के प्रतिदिन के वेतन के आयत चित्र दिये गये हैं। आयत चित्रों के आधार पर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

कर्मचारियों की संख्या
3483.ज्हु

वेतन (रुपये में)

ग्. ` 70-80 के मध्य वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या कितनी है?
ग्ग्. ` 90 या उससे अधिक तथा ` 120 से कम वेतन प्राप्त करने वाले कितने कर्मचारी हैं?
ग्ग्ग्. कितने कर्मचारी प्रतिदिन ` 100 या ` 100 से कम वेतन प्राप्त करते हैं?
ग्न्. कितने कर्मचारी प्रतिदिन ` 80 या उससे अधिक वेतन प्राप्त करते हैं?
न्. प्रतिदिन सबसे अधिक वेतन पाने वाले कितने कर्मचारी हैं?
9. 50 परिवारों का सर्वेक्षण करने पर प्रत्येक परिवार के पास रहने के कमरों के निम्नांकित आँकड़े प्राप्त हुए । बहुलक ज्ञात कीजिए :
कमरों की संख्या 1 2 3 4
परिवारों की संख्या 12 24 8 6

10. निम्नांकित सारणी से माध्यिका ज्ञात कीजिए :

प्राप्तांक 33 34 35 36 37

बारम्बारता 2 3 4 5 1

11. निम्नांकित बारम्बारता बंटन का बहुलक ज्ञात कीजिए :

पद 21 22 23 24 25

बारम्बारता 2 3 5 1 2

12. प्रथम पाँच अभाज्य संख्याओं का माध्यिका है : -

(क) 6.2 (ख) 5.6 (ग) 5.0 (घ) 3.0

हमने क्या चर्चा की ?

1. आँकड़ों को अधिक प्रभावशाली तथा सांख्यिकीय गणना हेतु अधिक उपयुक्त रूप में प्रस्तुत करने के लिए इन आँकड़ों को समूहों या वर्गों में रख कर व्यवस्थित करते हैं। वर्गों को वर्ग-अन्तराल भी कहते हैं।

2. आयत चित्र (हिस्टोग्राम) वर्गीकृत आँकड़ों के आरेखीय निरूपण को कहते हैं जिसमें वर्ग-अन्तराल क्षैतिज अक्ष पर और बारम्बारताएँ ऊध्र्वाधर अक्ष पर ली जाती हैं। इन आयतों को वर्ग अन्तरालों को आधार तथा उनकी संगत बारम्बरता को ऊँचाई मानकर बनाया जाता है।

3. केन्द्रीय प्रव=त्ति की माप एक ऐसी संख्या होती है, जो समस्त आँकड़ों का प्रतिनिधित्व करती है। यह संख्या प्राय: दिये गये आँकड़ों के मध्य या उसके आसपास की संख्या होती है। इसी संख्या वेâ आस-पास सभी आँकड़े वितरित होते हैं।

4. केन्द्रीय प्रव=त्ति की मापें तीन प्रकार की होती हैं, यथा समान्तर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक।

5. यदि आँकड़ों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित किया जाय, तो मध्य में पड़ने वाले पद का मान माध्यिका कहलाता है।

6. जब आँकड़े अवर्गीकृत तथा विषम संख्या में हों, तब माध्यिका 4169.ज्हुवाँ पद होती है जहाँ ह पदों की संख्या है।

7. जब आँकड़े अवर्गीकृत तथा सम संख्या में हों, तब

माध्यिका · $\dfrac{\frac{n}{2} \text{ वें पद का मान } + \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{वें पद का मान}}{2}$,जहाँ ह पदों की संख्या है।

8. अवर्गीकृत किन्तु सारणीबद्ध आँकड़ों की माध्यिका ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम पदों की संचयी बारम्बारता ज्ञात की जाती है। किसी पद की संचयी बारम्बारता ज्ञात करने के लिए उस पद की बारम्बारता में उसके पूर्ववर्ती समस्त पदों की बारम्बारता जोड़ दी जाती है।

9. दिये गये आँकड़ों में सबसे अधिक बार आने वाले पद को बहुलक कहते हैं। अर्थात् जिस पद की बारम्बारता सबसे अधिक होती है, वही पद बहुलक कहलाता है।

ष्टाझ्ज्ञ् ½झ्झ्°झ्झ्

अभ्यास **15 (a)**

1. (I) 0 - 5, 5-10, 10-15, 15-20, 20-25, 25-30; **(II)** 15-20, 20-25, 25-30, 30-35, 35-40, 40-45

2.

क्रम संख्या वर्ग टैली चिह्न बारम्बारता

1 45-55 |||| ||| 8

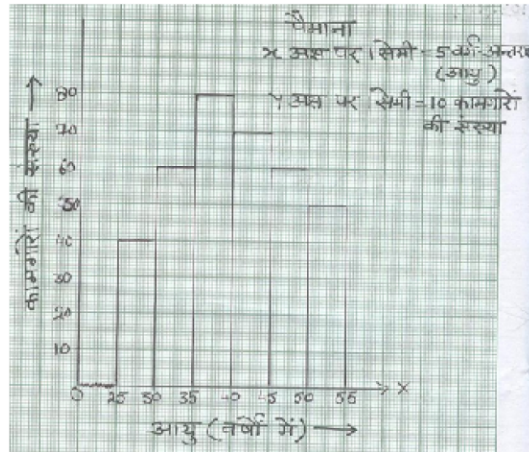
2 55-65 | | 2

3 65-75 |||| || 7

4 75-85 lll 3
5 85-95 l l 2

अभ्यास 15 (ं)

1.ग्. 155-160, ग्ग्. 10, ग्ग्ग् 22, ग्र्. 145-150 सेमी, न्. 30
2.
3.

4.i. 5, **ii.** 125-130, **iii.** 30, **iv.** 140-145, 20, **v.** 28.

5.

अभ्यास 15 (म)

1. 32 वर्ष; 2. 139 सेमी; 3. 6; 4. 7 नम्बर।

अभ्यास 15 (ृ)

1. 12, 2. (ग्) 12, (ग्ग्) 38; 3. 26

दक्षता अभ्यास 15

1. (ग्) 19, (ग्ग्) 10, (ग्ग्ग्) 5.5; 2. 7; 3. 14; 4. (ग्) 5, (ग्ग्) 4, (ग्ग्ग्) 7; 5. 20 सेकण्ड; 6. ग्. 10, ग्ग्. 18, ग्ग्ग् 12, ग्र् 27, न् 9; 8. ग् 8, ग्ग् 48, ग्ग्ग् 44, ग्र् 80, न्. 4, 9. 2 कमरे ; 10. 35; 11. 23; 12. ग 5.0;

इकाई - 16 संभावना

- **किसी सिक्के के उछालने पर शीर्ष (चित) या पूँछ (पट) के उâपर पड़ने की संभावना का बोध**
- **किसी पाँसे को उछालने पर किसी एक फलक के ऊपर आने की संभावना**
- **संभावनाआें का दैनिक जीवन से सम्बन्ध**

16.1भूमिका

दैनिक दिनचर्या में लोग आपस में ऐसी बात-चीत करते हुए सुने जाते हैं कि-

1. आज आकाश में बादल उमड़-घुमड़ रहे हैं, उमस भी है, सम्भवतः वर्षा हो सकती है।

2. मेरे पुत्र ने प्रतियोगितात्मक लिखित परीक्षा के प्रश्न पत्र बहुत अच्छे किये हैं, उसे सफलता मिल सकती है ।

3. इस वर्ष मेरे घर में मंगल कार्य का संयोग बन सकता है ।

4. इस वर्ष भारत में रबी की फसल अच्छी होने की सम्भावना है, जिससे महंगाई की दर घट सकती है ।

बातचीत के उपर्युक्त कथनों में परिणाम की सुनिश्चितता कहीं भी देखी नहीं जा सकती है। प्रथम कथन में वर्षा का होना या न होना कुछ भी सुनिश्चित नहीं है। एक अनिश्चितता की स्थिति स्पष्टतः बनी हुई है। वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी। इसी प्रकार द्वितीय कथन का परिणाम भी संदिग्ध है। यह सुनिश्चित नहीं है कि मेरा पुत्र प्रतियोगितात्मक लिखित परीक्षा में सफल होगा ही। वह सफल हो भी सकता है और नहीं भी। इसी प्रकार शेष दोनों कथनों में भी परिणाम सुनिश्चित नहीं हैं । वे कथनानुसार सत्य भी हो सकते हैं और नहीं भी। प्रायः ऐसे कथनों में परिणामों की भविष्यवाणियां या पूर्वानुमान जिन्हें प्रागुक्तियां (झ्रिाग्म्ूग्दहे) कहते हैं, हम उत्पन्न परिस्थिति को देखते हुए करते हैं। हर वर्ष मई-जून के माह में, इस वर्ष की मानसूनी वर्षा के संदर्भ में प्रागुक्ति की जाती है जिसका सत्य होना या सत्य न होना संयोग पर निर्भर करता है। गणित की सांख्यिकी शाखा के अन्तर्गत ऐसे कथनों पर आधारित आंकड़ों का अध्ययन, ‘‘संभावनाओं की सांख्यिकी’’ के रूप में किया जाता है। इस प्रकरण में इसी संबोध पर चर्चा की जायेगी ।

16.2 किसी सिक्के के उछालने पर शीर्ष (चित) या पूँछ (पट) के ऊपर आने की संभावना का बोध :

क्या आपको यह पता है कि क्रिकेट मैंच का प्रारम्भ सिक्का उछालने से होता है जिसे हम टॉस (ऊदे) करना कहते हैं। टॉस जीतने वाले को सबसे पहले बैटिंग या फील्डिंग करने का अधिकार मिल जाता है। सिक्का उछालने के पूर्व एक टीम का कप्तान सिक्के का शीर्ष चुनता है तथा

दूसरा सिक्के की पूँछ। शीर्ष को चित तथा पूँछ को पट भी कहते हैं। अंग्रेजी में शीर्ष और पूँछ को क्रमशः प◌र◌्◌ी् और ऊaग्त् कहते हैं। संक्षेप में शीर्ष को प् तथा पूँछ को ऊ से प्रदर्शित करते हैं। दोनों पक्षों के कप्तानों द्वारा शीर्ष एवं पूँछ का चयन कर लेने के बाद सिक्का उछाला जाता है। सिक्का उछालने के पूर्व यह किसी कप्तान को सुनिश्चित नहीं होता कि वह टॉस जीत ही जायेगा। उसका टॉस जीतना एक संयोग (ण्प्aहम) है। टॉस जीतने की लालसा तो दोनों कप्तानों के मन में विद्यमान रहती है, किन्तु परिणाम किसके पक्ष में जायेगा यह कोई नहीं जानता। कभी-कभी ऐसा होता है कि किसी मैच सीरीज में एक ही पक्ष का कप्तान टॉस बार-बार जीत जाता है । अतः सिक्का उछालने का परिणाम सदा अनिश्चित रहता है। बस, इतना ही सुनिश्चित होता है कि सिक्का उछालने पर या तो शीर्ष ऊपर आयेगा अथवा पूँछ । यहां एक संकल्पना की जा सकती है कि यदि सिक्का प्रत्येक प्रकार से निर्दोष है, सिक्का उछालने के दौरान सिक्के पर उसके भार के अतिरिक्त किसी अन्य बल का प्रभाव नहीं पड़ रहा हो तथा सिक्का उछालने वाला व्यक्ति किसी प्रकार का पक्षपात नहीं कर रहा हो तो सिक्का उछालने पर शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की संभावनाएं बराबर होंगी। अर्थात् शीर्ष के ऊपर आने का संयोग उतना ही बनता है जितना कि पूँछ के ऊपर आने का संयोग ।

विचार कीजिए कि सिक्का उछालने का प्रयोग और कहां-कहां किया जाता है?

किसी चुनाव की मतगणना में दोनों पक्षों के बराबर मत पड़े हों तो टॉस द्वारा हार-जीत का निर्णय किया जाता है। क्रिकेट के अतिरिक्त कुछ अन्य खेलों में भी टॉस किया जाता है ।

पाश्र्वांकित चित्र में एक रुपये के सिक्के के शीर्ष और पूँछ को दर्शाया गया है। किसी सिक्के का वह प=ष्ङ्ग जिस पर अशोक स्तम्भ बना होता है, उसे शीर्ष (चित) तथा उसके विपरीत प=ष्ठ को पूँछ (पट) कहते हैं ।

पूँछ

ध्यान देने योग्य है कि सिक्का उछालने पर ऊपर चित या पट ही आता है। ऐसा संयोग लगभग नगण्य ही है कि सिक्का अपने वक्रीय कोर पर संतुलित हो जाय ।

स्वयं करके देखिए और लिखिए

क्रिया-कलाप-1

आप एक सिक्के को 10 बार, 20 बार, 30 बार, 40 बार, 50 बार, 75 बार तथा 100 बार उछाल कर यह देखें कि विभिन्न दशाओं में शीर्ष और पूँछ कितनी बार आते हैं। उसे निम्नांकित सारणी में लिखते जायें।

सिक्का के उछालों की शीर्ष आने की पूँछ आने की

संख्या संख्या संख्याaäके को 10 बार, 20 बार, 30 बार, 40 बार, 50 बार, 75 बार तथा 100 बार उछाल कर यह देखें कि विभिन्न दशाओं में शीर्ष और पूँछ कितनी बार आते हैं। उसे निम्नांकित सारणी में लिखते जायें।

सिक्का के उछालों की शीर्ष आने की पूँछ आने की

संख्या संख्या संख्या

10
20
30
40
50
75
100

आप देख सकते हैं कि सिक्के के उछालों की संख्या अधिक हो जाने पर शीर्ष एवं पूँछ आने की संख्या लगभग बराबर है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि जैसे-जैसे उछालों की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की संख्याएँ लगभग बराबर होती जातीं हैं ।

निम्नांकित सारणी को देखिए,

सिक्का के उछालों की संख्या	शीर्ष आने की संख्या	पट आने की संख्या
10	7	3
20	11	9
30	14	16
40	18	22
50	23	27
75	35	40
100	48	52

यह सारणी एक वास्तविक प्रयोग के आधार पर तैयार की गई है। सिक्के के 100 उछाल में यह पाया गया है कि 48 बार शीर्ष पड़ा तथा 52 बार पूँछ ।

कक्षा में सभी शिक्षार्थी एक ही आकार-प्रकार का एक रुपये का सिक्का लेकर इस प्रयोग को दुहरा सकते हैं। ऐसे प्रयोगों के लिए सिक्के का एक ही आकार प्रकार तथा एक ही मूल्य का होना आवश्यक है। ऐसा होने से यह माना जा सकता है कि सभी शिक्षार्थी एक सिक्का लेकर उछाल रहे हैं। शीर्ष और पूँछ ऊपर आने की संख्याओं को गिनकर शिक्षार्थी नई सारणियाँ तैयार करें। भिन्न-भिन्न आकार-प्रकार तथा असमान मूल्य के सिक्के लेकर उछालने पर शीर्ष और पूँछ के ऊपर आने की संख्याएँ प्रभावित हो सकती हैं। इन प्रयोगों के आधार पर आप देखेंगे कि उछालों की संख्या जैसे-जैसे बढ़ती जाती है (अधिक से अधिक होती जाती है), वैसे-वैसे शीर्ष या पूँछ के ऊपर आने की संख्या लगभग बराबर होती जाती है ।

किसी सिक्के को उछालने पर शीर्ष या पूँछ के ऊपर आने की संभावना समान होती है।

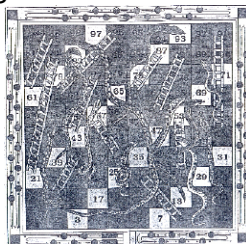
आप जानते हैं कि दैनिक जीवन में हम ऐसे कई क्रिया-कलाप करते हैं जिन्हें बार-बार दुहराने पर भी उनके परिणाम कभी नहीं बदलते, जैसे शिक्षार्थी चाहे जिस प्रकार के त्रिभुज अपनी लेखन पुस्तिकाओं में खींचे, उन सभी त्रिभुजों के अन्तः कोणों का योग सदैव दो समकोण के

बराबर ही आयेगा। इन प्रयोगों के परिणाम संयोग पर निर्भर नहीं होते किन्तु सिक्का उछालने पर प्राप्त होने वाले परिणाम सदैव संयोग पर निर्भर होते हैं, चाहे प्रत्येक बार प्रयोग की परिस्थितियाँ एक समान ही क्यों न हों ।

संयोग पर निर्भर एक अन्य प्रयोग पाँसा पेंâकने का है, जिसकी चर्चा आगे की जायेगी। सिक्का उछालने या पाँसा पेंâकने के प्रयोग 'यद=च्छया (Raह्दस्) प्रयोग' कहलाते हैं। संभावनाओं की सांख्यिकी में इन्हीं प्रयोगों का अध्ययन किया जाता है । आप देख सकते हैं कि यद=च्छया प्रयोगों को बार-बार दुहराने पर इनके परिणाम बदल जाते है ।

16.3 किसी पाँसे को उछालने पर किसी एक फलक के ऊपर आने की संभावना :

क्या आपने कभी लूडो अथवा साँप-सीढ़ी वाला खेल खेला अथवा देखा है? इस खेल को खेलने के लिए किन खेल सामग्रियों का प्रयोग किया जाता है?

साँप-सीढ़ी के खेल में एक मोटे वर्गाकार दफ्ती के टुकड़े पर बढ़िया ग्लेज पेपर जैसी कागज की शीट चिपकाई गई होती है, जिस पर वर्गाकार 100 खाने बने होते है, जिनमें क्रम से 1 से लेकर 100 तक के धनात्मक पूर्णांक लिखे हुए होते हैं । इसी शीट पर एक खाने से प्रारम्भ कर किसी अन्य खाने तक जाती हुई कई सीढ़ियाँ बनी होती हैं। इसी प्रकार किसी एक खाने से प्रारम्भ कर किसी दूसरे खाने तक पहुॅचने वाले कई साँप भी बने होते हैं। खेल खेलने के लिए लघु आकार का संतुलित घन जैसा ङ्खोस गुटका होता है जिसे पाँसा (Dघ्E) कहते हैं। यह समांगी (प्दस्द्दुाहादल्ं) होता है तथा इसके छह फलकों पर 1 से 6 तक की संख्याएं (पूर्णांक) अंकित होती हैं। ध्यान देने योग्य है कि एक फलक पर केवल एक ही संख्या अंकित होती है। कभी-कभी फलकों पर संख्या के स्थान पर बिन्दु अंकित होते हैं। खेल कम से कम दो प्रतिभागियों के बीच खेला जा सकता है। खेल खेलने के लिए सभी प्रतिभागी क्रम से पाँसे को क्षैतिज तल पर पेंâकते हैं। प्रत्येक प्रतिभागी के पास भिन्न-भिन्न रंगवाली (सामान्यतः लाल, पीली, नीली और हरी) गोटियां होती हैं जिन्हें अंक 1 से आगे को प्रतिभागी द्वारा पेंâके गये पाँसे के ऊपर आने वाले फलक पर अंकित संख्या अथवा बिन्दुओं की संख्या के बराबर खाने गिनकर बढ़ाया जाता है ।

एक बार जितने अंक पाँसे पर आते हैं, उतने खाने गोटी आगे बढ़ा ली जाती है। इस खेल में एक विशेष नियम यह है कि जब भी छह का अंक पाँसे पर ऊपर आता है, प्रतिभागी को अगला अवसर भी पाँसा पेंâकने को मिल जाता है। सीढ़ी के निचले सिरे वाले खाने पर प्रतिभागी की गोटी पहुंचने पर उसे सीढ़ी के सहारे सीधे सीढ़ी के शिखर वाले खाने तक पहुॅचने का अवसर मिल जाता है। यदि कभी गोटी साँप के मुँह वाले खाने पर पहुंच जाती है तो उसे सीधे खिसका कर साँप की पूँछ वाले खाने तक पहुंचानी पड़ती है। इस प्रकार प्रतिस्पर्धी प्रतिभागियों के बीच खेल चलता रहता हैं । जिसकी गोटी सबसे पहले संख्या 100 वाले खाने को पार कर लेती है, वही विजयी होता है ।

करके देखिए

समांगी पाँसे को पेंâक कर देखिए कि :

(1) पाँसे के कितने फलक एक साथ ऊपर आ जाते हैं?
(2) पाँसे को कई बार पेंâक कर देखिए कि क्या एक ही संख्या बार-बार उâपर आ जाती है? अथवा क्या कोई विशेष संख्या कभी भी ऊपर नहीं आती ?
आप पाँसे को 10, 20, 30, ...1000, ... बार पेंâक कर देख सकते हैं कि कभी भी पाँसे के दो फलक एक साथ ऊपर नहीं आ सकते ।
पाँसे का कोई भी फलक जब ऊपर आता है, तो वह शेष पाँचों फलकों को ऊपर आने से रोक देता है। साथ ही समाँगी पाँसे के सभी फलकों के ऊपर आने की संभावना या संयोग समान रहता है। सिक्का उछालने की भांति ही जब पाँसा पेंâका जाता है तब भी परिणाम सदैव अनिश्चित ही होता है। ऐसा सुनिश्चित नहीं होता कि कई बार पाँसा पेंâकने पर पाँसे के फलकों पर अंकित संख्याएँ किसी निश्चित क्रम में ऊपर आयें। हर बार परिणाम बदल सकता है, तथा कभी-कभी एक संख्या ही कई बार ऊपर आ सकती है किन्तु यदि पाँसा पेंâकने की संख्या बढ़ाते जायँ, तथा हर बार पाँसे के ऊपर आने वाली संख्याओं की संख्या लिख ली जाय तो यह देखा जा सकता है कि पाँसे पर ऊपर आने वाली संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 की संख्या आपस में लगभग बराबर होने के समीप पहुंचती जाती हैं ।
करके देखिए और लिखिए

क्रिया-कलाप-2

उपर्युक्त तथ्य के परीक्षण हेतु आप एक पाँसे को 30 बार, 60 बार, 90 बार पेंâक कर पाँसे पर जो संख्या जितनी बार ऊपर आती है, अर्थात् 1, 2, 3, 4, 5, 6 जितनी बार आती है, उसे निम्नाँकित प्रारूप की सारणी में लिखते जायँ ।

सारणी

पाँसा पेंâकने की संख्या	पाँसे पर इन अंकों के ऊपर आने की संख्या					
	1	2	3	4	5	6
30						
60						
90						

आप देख सकते हैं कि पांसे के अधिक बार पेंâकने पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में प्रत्येक के ऊपर आने की संख्या लगभग बराबर है ।

इस क्रिया कलाप में पाँसा पेंâकने की संख्या जितना अधिक बढ़ाते जायेंगे, प्रेक्षणों में इन संख्याओं (1, 2, 3, 4, 5, 6) में प्रत्येक के ऊपर आने की संख्या उतनी ही अधिक शुद्धता के साथ लगभग बराबर होती चली जाती है। अतः सिक्के की तरह ही पाँसे को भी कई बार पेंâकने पर आप यह अनुभव करेंगे कि पाँसे के फलकों पर अंकित अंकों या बिन्दुओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में

सभी के ऊपर आने की सम्भावना लगभग बराबर होती है। स्पष्टतः प्रक्षेपण के परिणाम स्वरूप यहाँ कुल छह ढंगों में पाँसे के फलक के ऊपर आने की सम्भावना बराबर होती है ।

इस प्रकार हम निम्नांकित निष्कर्ष पर पहुंचते हैं :

किसी समांगी पाँसे को पेंâकने पर उस पर अंकित संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक के ऊपर आने की सम्भावना समान होती है ।

पाँसा पेंâकने का सामूहिक क्रिया-कलाप भी किया जा सकता है। इसके लिए कक्षा के शिक्षार्थियों को 5 छोटे-छोटे वर्गों में विभाजित कर दिया जाय। प्रत्येक वर्ग को एक पाँसा 30 बार पेंâकने के लिए कहा जाय। अच्छा होगा कि वर्ग का एक सदस्य पाँसा पेंâके तथा दूसरे सदस्य सावधानी पूर्वक पॉसे पर ऊपर आने वाली संख्याओं की संचयी संख्या को निम्नांकित सारणी में अंकित करें ।

वर्ग एक वर्ग में एक पाँसे पर इन अंकों के ऊपर आने की वर्गवार

पाँसे के पेंâके जाने संचयी संख्या

की कुल संख्या 1 2 3 4 5 6

1. 30
2. 30
3. 30
4. 30
5. 30

योग =150

उपर्युक्त सारणी में योग संचयी संख्याओं को ध्यान पूर्वक देखा जाय। देखने से यह परिणाम प्राप्त होगा कि सभी अंकों 1, 2, 3, 4, 5, 6 के योग संचयी संख्याओं में अन्तर पर्याप्त कम है । दूसरे शब्दों में कहा जा सकता है कि इन अंकों की योग संचयी संख्याएँ आपस में लगभग समान हैं ।

उपर्युक्त सामूहिक क्रिया-कलाप में एक बात का ध्यान सावधानी पूर्वक रखना होगा कि सभी वर्गों में प्रयुक्त पाँसे समान आकार-प्रकार के होने चाहिए जिससे यह मान लिया जा सके कि सभी वर्गों में पेंâके गये पाँसे एक ही पासा है ।

अब तक की चर्चा से यह बात शिक्षार्थियों को स्पष्ट हो चुकी होगी कि किसी पाँसे के पेंâकने पर केवल कुल छह परिणाम ही प्राप्त होते हैं यथा 1, 2, 3, 4, 5, 6 का सम संभावी ढंग से ऊपर आना। अर्थात् इन सभी छह परिणामों के प्राप्त होने की सम्भावना समान होती है ।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. एक सिक्के के कितने तल होते हैं ?
2. सिक्के का कौन-सा तल शीर्ष तथा कौन सा तल पूँछ होता है ?
3. सिक्का उछालने पर कितने तल एक साथ ऊपर आ सकते हैं?
4. क्रिकेट के मैच का प्रारम्भ किस वस्तु के उछालने से होता है?
5. एक समांगी पाँसे की कितनी फलवेंâ होती हैं?
6. जब कोई पाँसा पेंâका जाता है तो उसकी कितने फलवेंâ ऊपर आती हैं?

अभ्यास 16 (a)

1. एक सिक्का कई बार उछाल कर उसके शीर्ष (चित) तथा पूँछ (पट) आने की संख्या निम्नांकित सारणी में लिखी गयी है। अपनी अभ्यास पुस्तिका में सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

सिक्का के उछालों की संख्या चित आने की संख्या पट आने की संख्या

20 12 -

30 - 17

- 22 18

- 32 28

n m -

2.ह स् -

2. एक पाँसे को कई बार पेंâक कर उसके ऊपर आने वाली संख्याएं निम्नांकित सारणी में लिखी गयी हैं । अपनी अभ्यास पुस्तिका में सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए-

पाँसा पेंâके जाने की संख्या पाँसे पर इन अंकों के आने की संख्याpeS-

जए-

पाँसा पेंâके जाने की संख्या पाँसे पर इन अंकों के आने की संख्या

1 2 3 4 5 6

15 2 3 4 1 1 -

30 4 3 5 6 - 4

45 7 8 8 - 5 5

60 8 9 10 11 - 12

90 13 -- 17 12 14 18

-- 22 18 25 20 16 19

3. एक समांगी पाँसे के 48 बार पेंâकने पर प्रत्येक फलक के उâपर अपने की सम्भावनाओं को समान मान लेने पर ज्ञात कीजिए कि अंक 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक कितनी बार उâपर आयेगा?

4. एक समांगी पाँसे को 54 बार पेंâकने पर यह पाया गया कि सम अंको के उâपर आने की संख्या 25 है । तो ज्ञात कीजिए कि विषम अंकों के ऊपर आने की कुल संख्या कितनी होगी?

16.4 दो या तीन सिक्कों को एक साथ पेंâकने का प्रयोग

अब दो सिक्कों को एक साथ कई बार पेंâक कर ऊपर शीर्ष या पूँछ आने की स्थितियों का अवलोकन कीजिए। आप देखेंगे कि -

(1) दोनों सिक्कों में ऊपर शीर्ष आते हैं ।
(2) प्रथम सिक्के में ऊपर शीर्ष तथा दूसरे सिक्के में ऊपर पूँछ आता है।
(3) प्रथम सिक्के में ऊपर पूँछ तथा दूसरे सिक्के में ऊपर शीर्ष आता है।
(4) दोनों सिक्कों में ऊपर पूँछ आते हैं ।

शीर्ष के लिए प् तथा पूँछ के लिए ऊ संकेताक्षरों का प्रयोग कर उपर्युक्त चारो दशाएं प् प्, प् ऊ, ऊप् और ऊ ऊ से प्रदर्शित की जा सकती हैं ।

दो सिक्कों को एक साथ लेकर जब भी उछाला जायेगा तो इन्हीं चार परिणामों में से कोई एक परिणाम प्राप्त होगा और अवश्य प्राप्त होगा। इन परिणामों के अतिरिक्त कोई अन्य परिणाम प्राप्त नहीं हो सकता। जानने योग्य है कि इन चार परिणामों प् प्, प् ऊ, ऊप् और ऊ ऊ में से प्रत्येक के प्राप्त होने की संभावना समान है। यह भी ध्यान देने योग्य है कि प् ऊ और ऊप् दोनों भिन्न-भिन्न परिणाम हैं।

अब तीन सिक्कों को एक साथ लेकर कई बार उछालिए। प्राप्त परिणामों को ध्यान पूर्वक देखिए।

प्रथम सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है।

ढप् ऊल

प्रथम सिक्के पर शीर्ष आने के संगत द्वितीय सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है। इसी प्रकार प्रथम सिक्के पर पूँछ आने के संगत द्वितीय सिक्के पर शीर्ष या पूँछ आ सकता है

ढप् प्, प् ऊ, ऊ प्, ऊ ऊल

अब प्रथम एवं द्वितीय सिक्कों पर प् प् या प् ऊ या ऊ प् या ऊ ऊ आने के संगत तीसरे सिक्के पर भी शीर्ष या पूॅछ ऊपर आ सकता है।

T

इस प्रकार तीन सिक्कों को एक साथ पेंâकने पर कुल संभव 8 स्थितियाँ सामने आती हैं । दूसरे शब्दों में तीन सिक्कों को एक साथ पेंâकने पर कुल केवल 8 ही सम्भव परिणाम प्प्प्, प्प्ऊ, प्ऊप्, प्ऊऊ, ऊप्प्, ऊप्ऊ, ऊऊप् और ऊऊऊ प्राप्त होते हैं ।

ज्ञातव्य है कि यहाँ प्प्प्, प्प्ऊ, प्ऊप्, ... प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना समान है।

कीजिए, देखिए और लिखिए

क्रिया-कलाप-3

दो सिक्कों को एक साथ 10 बार, 20 बार, 30 बार उछाल कर निम्नांकित प्रारूप की सारणी में ऊपर आने वाले परिणामों की संख्या लिखिए-

दो सिक्कों को एक साथ	प्प् आने की	प्ऊ आने की	ऊप् आने की	ऊऊ आने की

उछालने की संख्या संख्या संख्या संख्या संख्या

10

20

30

आप देख सकते हैं कि उछालों की संख्या जैसे -जैसे बढ़ती जाती है, प्प्, प्ऊ, ऊप् और ऊऊ के ऊपर आने की संख्याएं आपस में लगभग बराबर होती जाती हैं अर्थात् उपर्युक्त चारों घटनाओं के घटित होने की संभावनाएं लगभग समान होती हैं ।

क्रिया-कलाप- 4

तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने पर प्राप्त परिणामों को निम्नांकित सारणी में अंकित कीजिए।

तीन सिक्कों को एक परिणामों की संख्या

साथ उछालने की संख्या HHH HHT HTH HTT THH THT TTH TTT

20

40

60

80

यहां भी आप देख सकते हैं कि उछालों की संख्या जैसे-जैसे बढ़ती जाती है प्प्प्, प्प्ऊ, प्ऊप्, प्ऊऊ, ऊप्प्, ऊप्ऊ, ऊऊप् और ऊऊऊ की संख्याएं आपस में लगभग बराबर होती जाती हैं अर्थात् उपर्युक्त सभी आङ्गों घटनाओं के घटित होने की संभावनाएं लगभग समान होती हैं।

16.5 दो पाँसों को एक साथ पेंâकने का प्रयोग

आपने जब एक समांगी पाँसा पेंâका था तो देखा था कि ऊपर सम सम्भावी छह संख्याएॅ 1, 2, 3, 4, 5, 6 आयी थीं। अब दो पाँसे एक साथ लेकर पेंâकिए। आप देख सकते है कि प्रथम पाँसे पर किसी भी संख्या के ऊपर आने के संगत दूसरे पाँसे पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से कोई भी एक संख्या ऊपर आ सकती है। इस तथ्य को निम्नवत् समझा जा सकता है-

इस प्रकार आप देख सकते हैं कि दो पाँसों को, एक साथ लेकर पेंâकने पर कुल सम संभावी 36 परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। ये सभी 36 परिणाम एक दूसरे से भिन्न हैं तथा इनमें से प्रत्येक के आने की सम्भावना समान है। ये36 परिणाम निम्नवत् है-

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)

(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2 ,6)

(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)

(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)

(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)

(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

ध्यान दीजिए कि (1, 2), (2, 1) से भिन्न है। इसी प्रकार (5, 6) , (6, 5) से भिन्न है, इत्यादि।

प्रयास कीजिए :

उपर्युक्त परिणामों का अवलोकन कर निम्नांकित प्रश्नों का उत्तर दीजिए-

(1) दो पाँसों को एक साथ पेंâकने पर ऊपर आने वाले अंकों का न्यूनतम् और अधिकतम् योग क्या होगा?

(2) कितनी घटनाएँ ऐसी घटित हो सकती हैं जिनमें दोनों पाँसों पर समान अंक ऊपर आयें?

(3) कितनी घटनाओं में दोनों पाँसों पर केवल विषम अंक ऊपर आते हैं?

(4) कितनी घटनाओं में दोनों पाँसों पर केवल सम अंक ही ऊपर आते हैं?

(5) कितनी घटनाओं में एक पाँसे पर सम तथा दूसरे पॉसे विषम अंक ऊपर आते हैं?

संभावनाओं का संख्यात्मक मापन

हम देख चुके हैं कि जब कोई सिक्का उछाला जाता है तो दो और केवल दो परिणाम प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार यदि दो सिक्कों को एक साथ लेकर उछालते हैं तो चार और केवल चार परिणाम प्राप्त होते हैं और तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने पर आङ्ग और केवल आङ्ग परिणाम प्राप्त होते हैं। उपर्युक्त सभी दशाओं में प्राप्त परिणाम विशेष को एक घटना भी कहते हैं ।

• उदाहरण के लिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो ऊपर शीर्ष का आना एक घटना है। इसी प्रकार ऊपर पूँछ का आना भी एक भिन्न घटना है। संकेत की भाषा में प् प्राप्त होना एक घटना है तथा ऊ प्राप्त होना दूसरी घटना है। यद=च्छया प्रयोग के इन परिणामों अथवा घटनाओं के समूह ढप्, ऊल को प्रतिदर्श समष्टि (एaस्ज्त एज्aम) कहा जाता है, जिसे सामान्यतः ए द्वारा संसूचित करते हैं ।

अतः ए = ढप्, ऊल

यहाँ दोनों परिणाम अथवा घटनाएँ प्रतिदर्श समष्टि के अवयव कहलाते हैं।

• इसी प्रकार जब दो सिक्के एक साथ लेकर उछाले जाते हैं तो प्राप्त होने वाले चार संभव परिणाम प्प्, प्ऊ, ऊप्, ऊऊ भी चार भिन्न-भिन्न घटनाएँ हैं। इनका समूह दो सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने के यद=च्छया प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि है। अतः इस प्रकार प्रतिदर्श समष्टि-

S = {HH, HT, TH, TT}

• पुनः, इसी प्रकार जब तीन सिक्के एक साथ लेकर उछाले जाते हैं, तो इस यद=च्छया प्रयोग का प्रतिदर्र्श समष्टि ए आङ्ग संभव परिणामों (या घटनाओं) HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT का समूह प्राप्त होता है ।

अर्थात् S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

उपर्युक्त सभी यद=च्छया प्रयोगों में सभी घटनाएँ सम संभावी होती हैं तथा जब एक घटना घटित होती है तो स्वतः ही वह अन्य घटनाओं को घटित होने से रोक देती है ।

उदाहरण के लिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो या तो शीर्ष ऊपर आता है अथवा पूँछ। ऐसा सम्भव ही नहीं है कि एक साथ शीर्ष और पूँछ ऊपर आ जायॅ। यहाँ देख सकते हैं कि एक सिक्का के उछालों पर कुल केवल दो घटनाएं प् या ऊ घटित हो सकती हैं तथा दोनों घटनाओं में से प्रत्येक के घटित होने की संभावना समान है। अतः कहा जा सकता है कि

घटना प् के घटने की संभावना 2503.ज्हु है और ऊ के घटने की संभावना भी 2508.ज्हुहै। घटना के घटित होने की संभावना का यही संख्यात्मक मापन है ।

- इसी प्रकार जब दो सिक्के लेकर उछाले जाते हैं तो इस यद=च्छया प्रयोग के कुल चार परिणाम प्प्, प्ऊ, ऊप् और ऊऊ प्राप्त होते हैं और इनमें से प्रत्येक के प्राप्त होने की संभावना समान रहती है। अतः यहां प्रत्येक परिणाम या घटना के प्राप्त होने या घटित होने की संभावना 2513.ज्हु है ।
- पुनः तीन सिक्कों को एक साथ लेकर उछालने के यद=च्छया प्रयोग में 8 परिणामों के प्राप्त होने की संभावना समान होती है। अतः इनमें से प्रत्येक के घटित होने की संभावना 2518.ज्हु है। अर्थात्

HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH Deewj TTT में से प्रत्येक के घटित होने की संभावना 2523.ज्हु है ।

□ **निष्कर्ष :**

- एक सिक्का उछालने पर प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना · $\frac{19}{18}$
- • दो ,, ,, ,, · $1\frac{1}{18}$
- तीन ,, ,, ,, · $\frac{1}{8}$
- अब पाँसा पेंâकने पर विचार कीजिए। जब एक पाँसा पेंâका जाता है तो कुल छह समसम्भव परिणाम प्राप्त होते हैं। यहां भी परिणाम को घटना कहते हैं तथा इन घटनाओं (या परिणामों) के समूह को पाँसा पेंâकने के यद=च्छया प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि ए कहते हैं ।

अतः ए = ढ1, 2, 3, 4, 5, 6ल

यहां भी संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना समान होती है और

प्रत्येक घटना के घटित होने की संभावना $\frac{1}{6}$ के बराबर है ।

इसी प्रकार जब दो पाँसे एक साथ लेकर पेंâके जाते हैं तो समसम्भावी कुल 36 घटनाएं निम्नांकित होती हैं -

(1, 1) (1, 2) (1, 3) (1, 4) (1, 5) (1, 6)
(2, 1) (2, 2) (2, 3) (2, 4) (2, 5) (2 6)
(3, 1) (3, 2) (3, 3) (3, 4) (3, 5) (3, 6)
(4, 1) (4, 2) (4, 3) (4, 4) (4, 5) (4, 6)
(5, 1) (5, 2) (5, 3) (5, 4) (5, 5) (5, 6)
(6, 1) (6, 2) (6, 3) (6, 4) (6, 5) (6, 6)

जो इस प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि के अवयव हैं तथा इनमें से प्रत्येक के घटित होने की संभावना का संख्यात्मक मापन $\frac{1}{6}$ जो इस प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि के अवयव हैं तथा इनमें से प्रत्येक के घटित होने की संभावना का संख्यात्मक मापन· $\frac{1}{6}$

• दो पाँसा ,, ,, ,, · $\frac{1}{6}$

टिप्पणी (1) उपर्युक्त उल्लिखित सभी घटनाएं सरल घटनाएं (एग्स्ज्त Eनहूे) कहलाती हैं।

(2) किसी घटना के घटित होने की संभावना के मापन को प्रायिकता (झ्rदंaंग्त्ूब्) भी कहते हैं ।

16.6 संभावनाओं का दैनिक जीवन से सम्बन्ध

संभावनाओं का दैनिक जीवन से बड़ा गहरा सम्बन्ध है। हम कोई भी कार्य किसी उद्देश्य की सम्प्राप्ति के लिए करते हैं । उदाहरणार्थ, आप कक्षा 8 में किस लिए अध्ययन कर रहे हैं? स्पष्टतः आप के जीवन का प्रत्येक क्रिया-कलाप किसी न किसी उद्देश्य से जुड़ा हुआ है। आप की सदैव यही अभिलाषा होती है कि आप अपने कार्र्य-उद्देश्य में, लक्ष्य-सम्प्राप्ति में सफल रहें, किन्तु क्या सर्वदा यह संभव हो पाता है? कदाचित नहीं। हम कभी सफल होते हैं तो कभी असफल। (हमारे प्रत्येक कार्य का अन्त या तो सफलता के साथ होता है अथवा असफलता के साथ। ऐसा भी नहीं है कि हम बार-बार सफल ही हों या बार-बार असफल। कभी सफलता तो कभी असफलता, कभी बार-बार सफलता तो कभी बार-बार असफलता हमारे कदम चूमती है । पूरा जीवन ही अनिश्चितताओं से भरा पड़ा है। सुबह उङ्ने से लेकर रात सोने तक न जाने कितनी घटनाएँ घटित होती रहती हैं, जिनके परिणामों के विषय में हम पूर्वानुमान या प्रागुक्ति तो व्यक्त कर सकते हैं किन्तु वे सही होंगी या गलत, इसे सुनिश्चितता के साथ कहा नहीं जा सकता ।) आज सम्पूर्ण आर्थिक जगत संभावनाओं पर ही टिका हुआ है । कृषि, वाणिज्य, आर्थिक जगत, आयुर्विज्ञान, जैविक विज्ञान, मौसम आदि अनेक क्षेत्रों में संभावनाओं की सांख्यिकी का प्रयोग किया जा रहा है। नित्य प्रति शेयरों के मूल्यों में उछाल या गिरावट, मुद्राफीति की दर, कृषि एवं औद्योगिक उत्पादन, विपणन आदि सभी कुछ सम्भावनाओं पर ही टिका है। किसी देश का बजट भी इन्हीं संभावनाओं पर आधारित होता है। किसी नये उद्योग-धन्धे की स्थापना भी संभावनाओं पर टिकी होती है। किसी संप्रभुता प्राप्त जनतंत्र में जन प्रतिनिधियों के चुनाव के परिणाम भी संभावनाओं पर ही आधारित होते हैं। सब प्रकार के सर्वेक्षणों के परिणाम भी संभावनाओं पर टिके होते हैं ।

आप काम तो कोई भी कर सकते हैं किन्तु सफलता आपके हाथ में नहीं होती। आप सफल भी हो सकते हैं और असफल भी। यहीं से प्रारंभ हो जाता है संभावनाओं का संसार । दैनिक जीवन की सफलता, असफलता आदि की संभावनाओं का संख्यात्मक रूप में मापन का प्रयास 'संभावनाओं की सांख्यिकी' के अध्ययन में किया गया है, जिसे सामान्यतः हम प्रायिकता (झ्rदंaंग्त्ूब्) के नाम से जानते हैं ।

मान लीजिये किसी प्रतियोगितात्मक परीक्षा में 50 सीटें हैं और चयन हेतु कुल 50,000 अभ्यर्थी उस परीक्षा में सम्मिलित हुए हैं, यहाँ यह माना जा रहा है कि प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित होने की संभावना दूसरों के समान है। अतः प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित

होने की संभावना का संख्यात्मक मापन $\frac{10}{10,000}$ अर्थात् $\frac{1}{1000}$ के बराबर माना जाता है। दूसरे शब्दों में कहा जाता है कि प्रत्येक अभ्यर्थी के चयनित होने की संभावना $\frac{1}{1000}$ है ।

उदाहरण : यदि कोई वंâपनी 10 लाख शेयर आमंत्रित करती है और उसे प्राप्त करने के लिए 50 लाख लोग आवेदन करते हैं तो प्रत्येक आवेदक का उस कम्पनी का शेयर प्राप्त करने की संभावना ज्ञात कीजिए ।

हल : शेयर प्राप्त करने की संभावना $= \frac{10,00,000}{50,00,000}$

$= \frac{1}{5}$ होगी

बीमा कम्पनियों, सटोरियों, नियोजन आदि में भी संभावना की सांख्यिकी की भारी आवश्यकता पड़ती है ।

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. दो सिक्कों को एक साथ लेकर पेंâकने पर क्या परिणाम प्राप्त हो सकते हैं ?
2. तीन सिक्कों को एक साथ पेंâकने पर कुल कितनी घटनाएँ हो सकती हैं ?
3. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर प्रतिदर्श समष्टि में समान अंकों वाले कितने जोड़े हो सकते हैं?
4. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर प्रतिदर्श समष्टि में कुल कितने अवयव होते हैं ?
5. संभावनाओं से जुड़े किन्हीं दो क्षेत्रों का उल्लेख कीजिए ।

अभ्यास 16 (b)

1. दो सिक्के एक साथ 40 बार उछाले गये । यदि HH, HT, TH ›eâceMeŠ 9, 8, 12 बार आये हों तो ज्ञात कीजिये कि ऊ ऊ कितनी बार आया होगा ?

2. एक सिक्का 1000 बार उछाला गया और पाया गया कि चित 455 बार आया। ज्ञात कीजिए पट आने का प्रतिशत कितना है ।

3. दो सिक्कों को एक साथ 400 बार उछालने पर देखा गया कि

दो चित 90 बार

एक चित 210 बार

कोई भी चित नहीं 100 बार

इनमें से प्रत्येक घटना के घटित होने का प्रतिशत ज्ञात कीजिये ।

4. एक पाँसे को 1000 बार पेंâकने पर प्राप्त परिणामों 1, 2, 3, 4, 5 और 6 की बारम्बारताएँ निम्नांकित सारणी में दी हुई हैं । 1, 2, 3, 4, 5, 6 में प्रत्येक के आने का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

परिणाम	1	2	3	4	5	6
बारम्बारता	180	150	160	140	180	190

5. दो पाँसे एक साथ पेंâके जाते हैं और पाँसों पर ऊपर आने वाले अंकों का योगफल लिया जाता है। निम्नांकित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए-

(ग) प्राप्त योग सम संख्या हो,

(गग) प्राप्त योग 3 का अपवत्र्य हो,

(ग्ग्) प्राप्त योग 4से न्यून हो,

(ग्र्) प्राप्त योग 10 से अधिक हो।

6. तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं। तो निम्नांकित घटनाओं को समुच्चय के रूप में लिखिए-

(ग्) कोई चित प्रकट नहीं होता,

(ग्ग्) केवल एक चित आता है,

(ग्ग्) कम से कम दो चित प्रकट होते हैं,

(ग्र्) तीनों चित आते हैं ।

7. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर दोनों पर सम अंको के ऊपर आने की घटना का समुच्चय ज्ञात कीजिए ।

8. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर दोनों पर विषम अंकों के उपर आने की घटना का समुच्चय लिखिए।

9. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर अंकों का योग विषम संख्या आने का समुच्चय लिखिए।

10. दो पाँसो को एक साथ पेंâकने पर अंकों का योग अभाज्य संख्या होने का समुच्चय लिखिए।

11. एक लाटरी में 100 इनाम हैं जबकि उसके 100000 टिकट बिके हैं। इस लाटरी का एक टिकट खरीदने वाले व्यक्ति की इनाम जीतने की संभावना कितनी है ।

हमने क्या चर्चा की ?

1. किसी प्रयोग में घटना या घटनाओं के घटित होने अथवा घटित न होने की संभावनाओं से सम्बन्धित आँकड़ों का अध्ययन ‘सम्भावनाओं की सांख्यिकी’ के रूप में किया जाता है।

2. कोई सिक्का उछालने पर ऊपर शीर्ष (चित) या पूँछ (पट) ही आता है। प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना समान होती है।

3. किसी समांगी पाँसे को पेंâकने पर उस पर अंकित संख्याओं 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक के ऊपर आने की सम्भावना समान होती है।

4. एक सिक्का उछालने पर चित या पट प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना का मापन 2588.ज्हु के बराबर होता है।

5. किसी समांगी पाँसा को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 में से प्रत्येक के ऊपर आने की संभावना का मापन 2593.ज्हु के बराबर होता है।

6. संभावनाओं का दैनिक जीवन से गहरा जुड़ाव है। सुबह उङ्गने से लेकर रात सोने तक न जाने कितनी घटनाएँ घटित होती रहती हैं, जिनके परिणामों के विषय में हम पूर्वानुमान या प्रागुक्ति करते रहते हैं, किन्तु उनका सही होना या गलत होना सुनिश्चित नहीं होता।

विशेष

हम देख चुके हैं कि संभावनाओं की सांख्यिकी अनिश्चित परिणामों वाली होती है। इसके अध्ययन का प्रारम्भ एक अदभुत घटना से हुआ। 1654में प्रâांस का एक

जुआरी जिसका नाम शेवेलियर डि मेरे (ण्पन्aत[ar श्ीा) था, एक विचित्र समस्या से जूझ रहा था। उसकी समस्या जुए में जीत से जुड़ी हुई थी और वह जानना चाहता था कि वह किस प्रकार खेले या खेल का प्रारम्भ करे कि उसकी जीतने की संभावना बढ़ जाय। अपनी इस समस्या के समाधान हेतु वह अपने एक महान वैज्ञानिक और गणितज्ञ मित्र ब्लेज पास्कल डँत्aग्ो झ्aेम्aत् (1623-1662)् से मिला। पास्कल को शेवलियर की समस्या में रुचि उत्पन्न हो गई और वे इसका अध्ययन करने लगे। पास्कल ने अपने एक अन्य गणितज्ञ मित्र फर्मा डझ्ीrा ईस्aू (1601-1665)् से भी इस विषय पर चर्चा की । इन्हीं दोनों महानुभावों के गम्भीर प्रयत्नों से गणित की एक नयी शाखा का अभ्युदय हुआ। यही शाखा आगे चल कर प्रायिकता सिद्धान्त (ऊपदrब् दf झ्rदंaंग्त्ूब) के नाम से प्रसिद्ध हो गयी जिसमें केवल संभावनाओं के गणितीय मापन का अध्ययन किया जाता है ।

इस विषय पर महत्वपूर्ण कार्य करने वाले कुछ अन्य गणितज्ञों के नाम निम्नांकित हैं :

- इतालवी गणितज्ञ जे0 कार्डन व्ीदस ण्arृaह (1501 - 1576)
- जे0 बर्नोली व्. ॅीहदल्त्ग् (1654- 1705)
- पी0 लाप्लास झ्ीrा थ्aज्त्aम (1749 - 1827)
- ए0 ए0 मार्कोव A. A. श्arव्दन् (1856 - 1922)
- ए0 एम0 कोल्मोगोरोव A. श्. ख्दत्सुदrदन् (जन्म 1903)

अभ्यास 16 (a)

1. पंक्तिवार 8,13, 40, 60, ह - स्; 2. पंक्तिवार 4, 8, 12, 10, 16, 120; 3. 8 बार; 4. 29

अभ्यास **16 (b)**

1. 11; **2.** 54.5%; **3.** 22.5%, 52.5%, 25% ; **4.** 18%, 15%, 16%, 14%**,** 18%,19% **5.** (i) { (1,1) (1, 3) (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5,), (6, 2), (6, 4), (6, 6)} (ii) {(1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)} (iii) {(1, 1), (1, 2,), (2, 1)} (iv) {(5, 6), (6, 5), (6, 6)}**6. (i)** { TTT} (ii) {HTT, THT, TTH} (iii) {HHT, HTH, THH, HHH}, (iv) {HHH}; **7.** {(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)}; **8.** {(1, 1) ,(1, 3), (1, 5), (3, 1), (3, 3,) (3, 5), (5, 1), (5, 3), (5, 5)}; **9.** {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 6), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 4), (5, 6), (6, 1), (6, 3), (6, 5)} **10.** {(1, 1) (1, 2), (1, 4), (1, 6), (2, 1), (2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (4, 1) (4, 3), (5, 2), (5, 6), (6, 1), (6, 5),}**11.** $\frac{1}{1000}$

इकाई - 17 कार्तीय तल

- कार्तीय तल की संकल्पना
- विभिन्न स्थितियों में बिन्दुओं का निर्धारण करके ग्राफ खींचना
- ग्राफ को पढ़ना तथा निष्कर्ष निकालना

17.1 भूमिका

हम संख्या रेखा पर एक बिन्दु (संख्या) की स्थिति का निर्धारण तथा उस बिन्दु अथवा अन्य बिन्दु की स्थिति की व्याख्या किस प्रकार की जाती है, का अध्ययन कर चुके हैं। परन्तु हमारे दैनिक जीवन में ऐसी कई स्थितियाँ आती हैं, जब हमें किसी बिन्दु की स्थिति निश्चित करने के लिए एक से अधिक रेखाओं का सहारा लेना पड़ता है, जिसे हम निम्न उदाहरण के द्वारा समझ सकते हैं।

पाश्र्व चित्र में एक कक्षा में 30 शिक्षार्थियों के बैङ्गने की व्यवस्था है। इसमें कुल 5 पंक्तियाँ एवं 6 स्तम्भों की व्यवस्था है। कक्षा में अलका कहाँ बैङ्गी है?

यदि आप कहें कि अलका जिस पंक्ति में बैङ्गी है उसकी संख्या '2' है। इससे उसकी स्थिति ङ्खीक-ङ्गीक नहीं ज्ञात होगी क्योंकि इस पंक्ति में बैङ्गे शिक्षार्थियों की संख्या 6 है। पुनः यदि आप कहें कि 'अलका' स्तम्भ संख्या 5 में बैङ्गी है। तो इससे भी उसकी स्थिति ङ्खीक-ङ्गीक नहीं ज्ञात होगी, क्योंकि इस स्तम्भ में बैङ्गे शिक्षार्थियों की संख्या 5 है। 'अलका' की सही स्थिति बताने हेतु कहना होगा कि वह पंक्ति संख्या 2 तथा स्तम्भ संख्या 5 में बैङ्गी है।

इसी प्रकार श्यामपट पर लिखे किसी अक्षर की स्थिति निर्धारित करने के लिए उस अक्षर की श्यामपट की लम्बाई के अनुदिश रेखा से दूरी तथा चौड़ाई के अनुदिश रेखा से दूरी अर्थात् एक साथ दो सूचनाओं की आवश्यकता होती है। इन उदाहरणों से हम पाते हैं कि किसी तल में स्थित किसी बिन्दु की सही स्थिति का निर्धारण करने हेतु हमें दो स्वतंत्र सूचनाओं की आवश्यकता पड़ती है। इस क्रम में हम इस इकाई के अन्तर्गत वर्गीकृत कागज (ग्राफ शीट) पर किसी बिन्दु की स्थिति वैâसे निर्धारित की जाती है तथा किसी बिन्दु की स्थिति की व्याख्या करने से संबंधित आवश्यक तथ्यों का अध्ययन करेंगे।

17.2 कार्तीय तल तथा निर्देश प्रेâम

इन्हें कीजिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

चित्रानुसार अपनी अभ्यास पुस्तिका पर दो संख्या रेखाएं 1848.ज्हु और 1853.ज्हुखींचिए।

इन दोनों रेखाओं 1858.ज्हु तथा 1863.ज्हुको एक तल में इस प्रकार व्यवस्थित कीजिए कि ये दोनों रेखाएँ एक दूसरे को शून्य (0) पर निम्नांकित चित्र 17.4के अनुसार लम्बवत् काटें।

2052.ज्ह्रु ें

1493.ज्हु

चतुर्थांश - II

चतुर्थांश - III
-3 -2 -1 +1 +2 +3

+3
+2
+1
-1
-2
-3

O

Y

Y′

चतुर्थांश - I
चतुर्थांश - IV

ध्यान दीजिए :

ये दोनों लम्बवत् रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं परंतु इस इकाई में एक तल में स्थित एक बिन्दु के स्थान निर्धारण के लिए दो रेखाएँ लेंगे, जिनमें एक रेखा क्षैतिज होगी तथा दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर होगी।

इस प्रकार तल चार भागों में विभक्त हो जाता है। इन चार भागों में से प्रत्येक भाग को चतुर्थांश (ेंल्a्rahे) कहा ध्यान दीजिए :

ये दोनों लम्बवत् रेखाएँ किसी भी दिशा में हो सकती हैं परंतु इस इकाई में एक तल में स्थित एक बिन्दु के स्थान निर्धारण के लिए दो रेखाएँ लेंगे, जिनमें एक रेखा क्षैतिज होगी तथा दूसरी रेखा ऊर्ध्वाधर होगी।

इस प्रकार तल चार भागों में विभक्त हो जाता है। इन चार भागों में से प्रत्येक भाग को चतुर्थांश (ेंल्a्rahे) कहा (O) तथा चतुर्थ चतुर्थांश ($\frac{(-5)^3}{(2\times2\times3)^3}$) कहा जाता है ।

इस तल को कार्तीय तल (ण्arूेग्aह इत्aहा) कहते हैं ।

कार्तीय तल का प्रतिपादन प्रâांसीसी गणितज्ञ रेने देकार्ते (Rाहा अेम्arूे) ने किया। उन्हीं के नाम पर कार्तीय तल का नामकरण हुआ ।

इसीलिए इनके सम्मान में एक तल में एक बिन्दु के निर्धारण की पद्धति को कार्तीय पद्धति (ण्arूेग्aह एब्ूेस्) तथा वह तल जिसके बिन्दु का निर्धारर्ण े-अक्ष तथा ब्-अक्ष द्वारा की जाती है, कार्तीय तल कहते हैं।

क्षैतिज एवं ऊर्ध्वाधर रेखाओं को निर्देशाक्ष या अक्ष (र्A्े) कहते हैं । इस प्रकार क्षैतिज रेखार् ेंध् या X को x- अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा भ्ध्1898.ज्हु या भ्1903.ज्हु को ब्-अक्ष कहते हैं ।

X

-3 -2 -1 o +1 +2 +3

चित्र 17.2

+3

+2
+1
o
-1
-2
-3

-

-

Y

×

दोनों अक्ष एक दूसरे को जिस बिन्दु पर काटते (प्रतिच्छेदित करते) हैं, उस बिन्दु को मूल बिन्दु (ध्rग्ुग्ह) कहते हैं । यहाँ ध् मूलबिन्दु है ।र्

े- अक्ष पर मूल बिन्दु से दायीं ओर की दिशा को धनात्मक तथा बायीं ओर की दिशा को ऋणात्मक मानते है। इसी प्रकार ब्- अक्ष पर मूल बिन्दु से ऊध्र्वाधरतः ऊपर की दिशा को धनात्मक एवं नीचे की दिशा को ऋणात्मक मानते है।र्

े-अक्ष, ब्-अक्ष तथा मूल बिन्दु ध् को संयुक्त रूप से निर्देश प्रेâम कहते हैं।

17.3 भुज एवं कोटि

इन्हें कीजिए, सोचिए एवं लिखिए

ग्राफ शीट पर चित्रानुसार तथा 1913.ज्हु दो अक्ष खींचिए। ग्राफ शीट पर दो बिन्दु झ् तथा ें चित्रानुसार अंकित करें। सेट स्क्वायर की सहायता से झ् सें े-अक्ष पर लम्ब झ्श् तथा ब्-अक्ष पर

लम्ब झ्N डालिए। इसीप्रकार ें सें े-अक्ष पर लम्ब ेंए तथा ब्-अक्ष पर लम्ब ेंऊ डालिए। इन लम्बों की लम्बाई माप कर लिखिए।

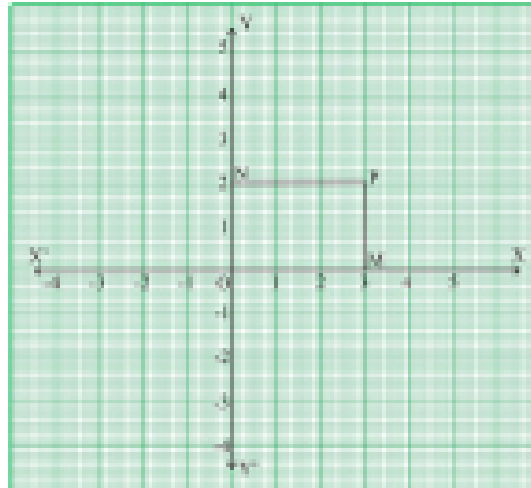
हम पाते हैं कि बिन्दु झ् की ब्-अक्ष से दूरी झ्N = ध्श् = 3 इकाई तथा बिन्दु झ् कीं े-अक्ष से दूरी झ्श् = ध्N = 2 इकाई है। इसी प्रकार बिन्दु ें की ब्-अक्ष से दूरी ेंऊ = ध्ए = 3 इकाई है तथा बिन्दु ें कीं े-अक्ष से दूरी ेंए = ध्ऊ = 3 इकाई है।

किसी बिन्दु की ब्-अक्ष से लम्बवत् दूरी को उस बिन्दु का भुज (Aेंम्[ेa)कहते हैं। यहं े-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होता है।

इस प्रकार बिन्दु झ् का भुज +3 तथा बिन्दु ें का भुज -3 है।

Q

S

T

इसी प्रकार किसी बिन्दु कीं े-अक्ष से लम्बवत् दूरी को उस बिन्दु की कोटि (ध्rृग्हaूI) कहते हैं। यह ब्-अक्ष की धनात्मक दिशा में धनात्मक तथा ऋणात्मक दिशा में ऋणात्मक होता है।

इस प्रकार बिन्दु झ् की कोटि +2 तथा ें की कोटि -3 है।

प्रयास कीजिए :र्

े को झ् का भुज अथवां े-निर्देशांक तथा ब् को झ् की कोटि अथवा ब्-निर्देशांक कहते हैं।

(x, y) को P के निर्देशांक (Coordinates) कहते हैं ।

X

N

O

Y

x

P

M

y

(x, y)

कार्तीय तल में स्थित क्षैतिज रेखा कों े-अक्ष कहते हैं।

कार्तीय तल में स्थित ऊध्वाधर रेखा को ब्-अक्ष कहते हैं।

कार्तीय तल में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक को (x, y) के रूप में लिखते हैं।

- **निर्देशांक ((x, y) में े भुज होता है तथा ब् कोटि होती है।**

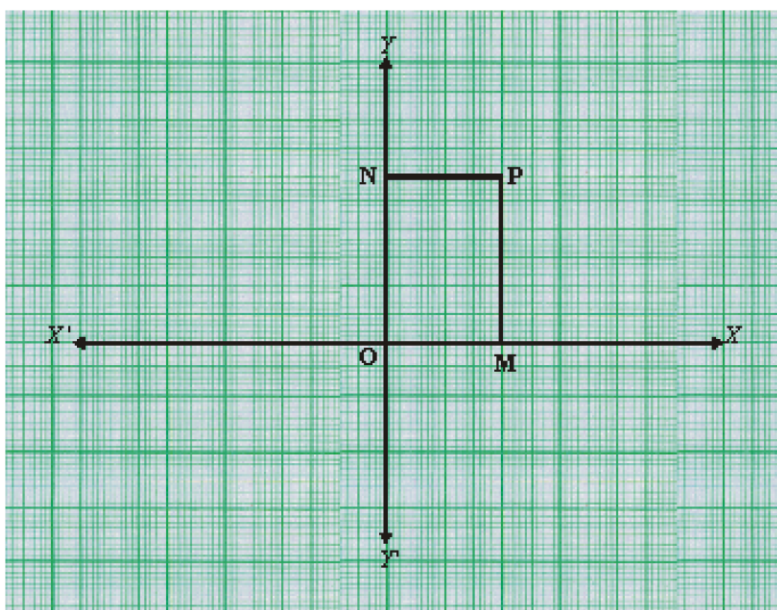
17.3.1 निर्देशांकों के लिखने की विधि

निर्देशांक सदा छोटे कोष्ठक ( ) के अन्दर लिखे जाते हैं। पहले भुज तथा फिर अल्प विराम (,) लगाकर कोटि लिखते हैं। इस प्रकार बिन्दु झ् के निर्देशांक **(x, y) हैं ।**

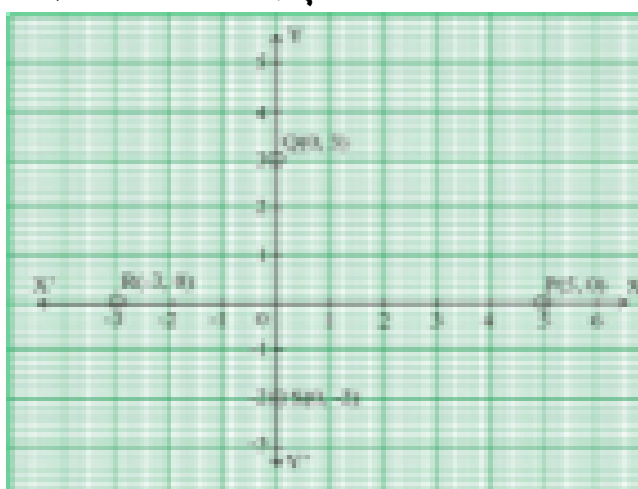
ध्यान दें,

मूल बिन्दु के लिए भुज 0 तथा कोटि 0 होता है तथा मूल बिन्दु के निर्देशांक (0, 0) लिखते हैं। निर्देशांक (x, y) तथा(y, x)एक समान नहीं हैं तथा यह कार्तीय तल पर अलग-अलग बिन्दुओं को निरूपित करते हैं।

17.4 विभिन्न स्थितियों में बिन्दुओं का निर्धारण करके ग्राफ खींचना।

कार्तीय तल पर निर्देश प्रेâम के अन्तर्गत किसी चतुर्थांश, मार्ना ेंध्भ् में किसी बिन्दु झ् की स्थिति को निर्धारित करने के लिए बिन्दु झ् सें े-अक्ष पर झ्श् लम्ब डाला जाता हैऱ्। े-अक्ष पर ध्श् की दूरी मार्ना े तथा इसके लम्बवत् दूरी ध्N माना ब् नापने पर समतल में झ् की स्थिति निर्धारित हो जाती है। इस प्रकार बिन्दु झ् को (x, y) से प्रदर्शित करते हैं।

बिन्दुओं का आलेखन

बिन्दुओं के निर्देशांक (भुज, कोटि) ज्ञात होने पर वर्गांकित कागज (ग्राफ पेपर) पर बिन्दु की स्थिति निर्धारित कर सकते हैं। इसे ही बिन्दु का आलेखन कहते हें ।

इन्हें देखिए, सोचिए और निष्कर्ष निकालिए

(i) इसमें बिन्दु झ्, े - अक्ष में +5 पर स्थित है और इस प्रकार बिन्दु झ् की कोटि शून्य है ।

ध्यान दीजिए कि,ऱ्

े - अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु की कोटि शून्य होती है। इस प्रकार बिन्दु झ् को (5, 0) से निरूपित किया जाता है।

(ग्ग्) उपर्युक्त चित्र में बिन्दु ें , ब् -अक्ष में +3 पर स्थित है और इस प्रकार बिन्दु ें का भुज शून्य है ।

ध्यान दीजिए कि,

ब्- अक्ष पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का भुज शून्य होता है। इस प्रकार बिन्दु ें को (0, 3) से निरूपित किया जाता है ।

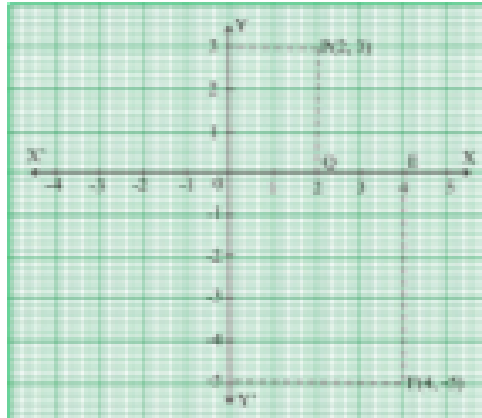
(ग्ग्ग्) पुनः उपर्युक्त चित्र में बिन्दु Rर्, े-अक्ष (ऋणात्मक दिशा) के बिन्दु -3 पर स्थित है,

अतः R को (-3, 0) से निरूपित किया जाता है ।

(ग्ट्) इसी चित्र में बिन्दु ए, ब्- अक्ष (ऋणात्मक दिशा) के बिन्दु -2पर स्थित है,

अत: ए को (0, -2) से निरूपित किया जाता है ।

बिन्दु (2, 3) का आलेखन

दिये हुए बिन्दु (2, 3) का भुज और कोटि दोनों ही धनात्मक हैं अतः यह प्रथम चतुर्थांश में स्थित होगा। इसकी स्थिति निर्धारित करने के लिए्ं े-अक्ष पर +2 पर बिन्दु ें प्राप्त कर लिया जाता है। फिर ें र्से े- अक्ष के ऊपर की ओर ब्-अक्ष के समान्तर 3 इकाई दूरी पर बिन्दु झ् प्राप्त कर लेते हैं, इस प्रकार झ्, बिन्दु (2, 3) का आलेख है ।

बिन्दु (4, -5) का आलेखन

बिन्दु (4, -5) में भुज धन और कोटि ऋण है। अतः यह चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित होगा । उपर्युक्त ग्राफ में धर्े पर +4पर स्थित बिन्दु E लेकर धर्े से लम्बवत् ध्भ्' के समान्तर 5 इकाई की दूरी में स्थित बिन्दु इप्राप्त कर लिया । बिन्दु (4, -5) का आलेखित बिन्दु इ है ।

इस प्रकार हम देखते हैं कि

(ग्) प्रथम चतुर्थांश में बिन्दु का निर्देशांक (+, +) के रूप का होगा, क्योंकि पहला चतुर्थांश धनात्मर्क े-अक्ष और धनात्मक ब्-अक्ष से परिबद्ध है अतः इसके बिन्दुओं के भुज और कोटि दोनों धनात्मक होंगे ।

(ग्ग्) यदि बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में है तो बिन्दु का निर्देशांक (–, +) के रूप में होगा। दूसरा

चतुर्थांश ऋणात्मर्क े-अक्ष और धनात्मक ब्-अक्ष से परिबद्ध ह्ै। दूसरे चतुर्थांश के बिन्दु का भुज ऋणात्मक और कोटि धनात्मक होती है ।

(ग्ग्) यदि बिन्दु तीसरे चतुर्थांश में स्थित है तो इस बिन्दु का निर्देशांक (–, –) के रूप का होगा। तीसरा चतुर्थांश ऋणात्मर्क े-अक्ष और ऋणात्मक ब्-अक्ष से परिबद्ध ह्ै। तीसरे चतुर्थांश के बिन्दु का भुज और कोटि दोनों ऋणात्मक होती हैं ।

(ग्र्) यदि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है तो बिन्दु का निर्देशांक (+, –) के रूप का होगा। चौथे चतुर्थांश के बिन्दु की भुज धनात्मक और कोटि ऋणात्मक है ।

चतुर्थांश भुज का चिह्न कोटि का चिह्न

प्रथम ± ±

द्वितीय – ±

त=तीय – –

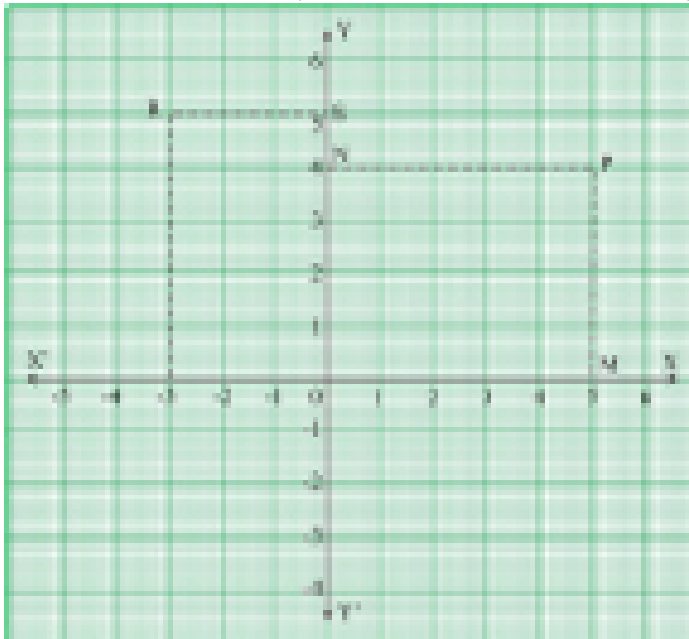
चतुर्थ ± –

□ **प्रयास कीजिए :**

बिन्दु (– 2, – 4) की स्थिति किस चतुर्थांश में होगी?

17.5 ग्राफ पेपर (वर्गांकित कागज) पर दिये हुए बिन्दुओं के निर्देशांक पढ़ना

देखिए, तर्वâ कीजिए और निष्कर्ष निकालिए

निम्नंकित चित्र में (ग्राफ पेपर पर) खींचे गये आरेख को ध्यान से देखिए। चित्र में बिन्दु झ् से र्े-अक्ष पर लम्ब झ्श् डाला गया है । इसी प्रकार ब्-अक्ष पर लम्ब झ्N डाला गया है ।

बिन्दु झ् की ब्-अक्ष से लाम्बिक दूरी झ्N = ध्श् = 5 इकाई है। जिर्से े-अक्ष की धनात्मक दिशा में नापा गया है । अतः भुज =5र्

े-अक्ष से बिन्दु झ् की लाम्बिक दूरी ब्-अक्ष की धनात्मक दिशा में नापी गयी है। झ्श् = ध्N = 4इकाई है । अतः कोटि =4

इस प्रकार बिन्दु झ् के निर्देशांक (5, 4) हुए ।

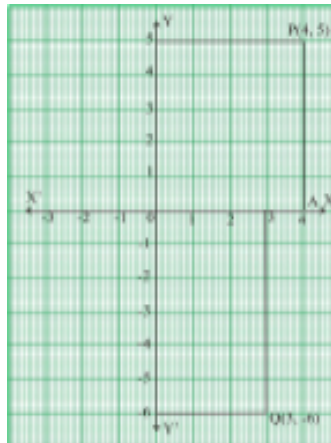
(ग्) उपर्युक्त चित्र में बिन्दु R को देखिए। ब्-अक्ष से बिन्दु R की लाम्बिक दूरी र्को े-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में नापा गया है। इसका भुज क्या है ?

(ii) x-अक्ष से बिन्दु R की लाम्बिक दूरी ब्-अक्ष की धनात्मक दिशा में नापी गई है। इसकी कोटि कितनी है? उपर्युक्त चित्र में बिन्दु R का भुज -3 तथा कोटि 5 है। इस प्रकार बिन्दु R के निर्देशांक (-3, 5) हुए।

दिये गए बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर दर्शाना

उदाहरण 1: बिन्दु (4, 5) और (3, -6) को ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए ।

हल : बिन्दु (4, 5) का अवलोकन करने पर पता चलता है कि इस बिन्दु का भुज +4तथा कोटि +5 है। अतः इस बिन्दु की धनात्मर्क े-अक्ष पर ब्-अक्ष से दूरी 4इकाई है, और धनात्मक ब्-अक्ष पर इस बिन्दु र्की े-अक्ष से दूरी 5 इकाई है ।

मूल बिन्दु से प्रारम्भ करके धनात्मर्क े-अक्ष पर 4इकाई की दूरी पर संगत बिन्दु A अंकित कीजिए। अब A से प्रारम्भ करके ब्-अक्ष के समान्तर धनात्मक दिशा में चलिए और 5 इकाई दूरी पर संगत बिन्दु को झ् से अंकित कीजिए। यह बिन्दु इस प्रकार प्रथम चतुर्थांश में स्थित होगा ।

प्रयास कीजिए :

इसी प्रकार बिन्दु (3, -6) को ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिए और बताइए कि यह बिन्दु किस चतुर्थांश में स्थित है ।

अभ्यास 17 (a)

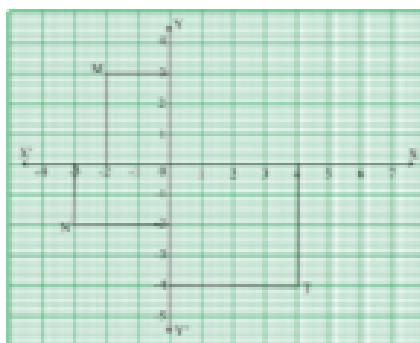
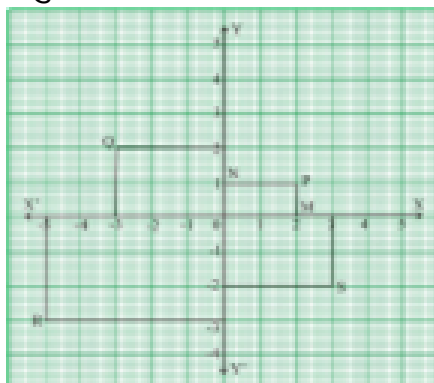
1. नीचे दिये चित्र को देखकर रिक्त स्थानों में लिखिए :

(ग्) बिन्दु श्र्, े-अक्ष की ----- दिशा में अंकित है ।

(गग्) बिन्दु श् से ब्-अक्ष पर लम्ब पाद की मूल बिन्दु से दूरी ----- इकाई है ।

(गग्) बिन्दु N, ब् -अक्ष की---- दिशा में अंकित है । बिन्दु N से ब्-अक्ष पर लम्बपाद की मूल बिन्दु से दूरी ----- इकाई है ।

(ग्र्) बिन्दु ऊ .... चतुर्थांश में अंकित है ।

(न्) बिन्दु ऊ र्से े-अक्ष पर लम्ब पाद की मूल बिन्दु से दूरी ----- इकाई है ।

2. निम्नांकित चित्र में अंकित बिन्दुओं को देख कर रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) ◌lqबन्दु झ् का भुज... और कोटि ...है अतः झ् के निर्देशांक (..., ...) हैं ।

(गग्) बिन्दु ◌ैं का भुज ...और कोटि... है अतः ◌ैं के निर्देशांक (..., ...) हैं ।

(गग्) बिन्दु R र्का ◌े- निर्देशांक ... और ब्-निर्देशांक ... है, अतः R के निर्देशांक (..., ...) हैं ।

(ग्न्) बिन्दु ए र्का ◌े-निर्देशांक ... और ब्-निर्देशांक ... है, अतः ए के निर्देशांक (..., ...) हैं।

3. ◌lqनम्नलिखित बिन्दु किन चतुर्थांशों में स्थित हैं ?

(i) (-3, -7) **(ii)** (- 5, 7) **(iii)** (2, -10)

(iv) (5, 9) **(v)** (-6, 5) **(vi)** (-7, -5)

4. निम्नलिखित बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित कीजिये :

(i) (7, 5) **(ii)** (7, 0) **(iii)** (-3, -6)

(iv) (0, -4) **(v)** (-6, -7) **(vi)** (10, -5)

(vii) (0, 0)

17.6ग्राफ द्वारा कुछ वास्तविक सम्बन्धों का निरूपण

उदाहरण 2 : वर्गों की भुजा एवं उसके संगत परिमापों के सम्बन्ध का ग्राफ द्वारा निरूपण कीजिए।

हल :मान लीजिए ◌े एक वर्ग की भुजा है और ब् इसी वर्ग का परिमाप है। तो $y = x + x + x + x = 4x$

x के विभिन्न मान लेकर संगत ब् के मानों को ज्ञात करके निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है।

वर्ग की भुजा (x **इकाई)** 0 1 2 3 4 5

परिमाप y **(4x इकाई)** 0 4 8 12 16 20

सारणी में दिये गयें े के विभिन्न मानों को भुज मानकर तथा उनके संगत परिमाप ब् के मानों को कोटि मान कर बिन्दुओं को आलेखित करेंगे। इन सब बिन्दुओं को मिलाती हुई प्राप्त रेखा वर्ग की भुजा और परिमाप के सम्बन्ध का ग्राफ है ।

उदाहरण 3 : वर्गों की भुजा और उनके संगत क्षेत्रफलों के सम्बन्ध का ग्राफ द्वारा निरूपण कीजिए।

हल : मानां े वर्ग की भुजा है और ब् इसी वर्ग का क्षेत्रफल है, तों े और ब् का सम्बन्ध $y = x^2$ द्वारा निरूपित होगा। इस प्रकारं े के कुछ भिन्न-भिन्न मान लेकर उनके संगत ब् के मानों को निम्नांकित सारणी में दर्शाया गया है।

भुजा **(**x **इकाई)** 0 1 2 3 4 5 6 7

वर्ग इकाई (y **वर्ग इकाई)** 0 1 4 9 16 25 36 49

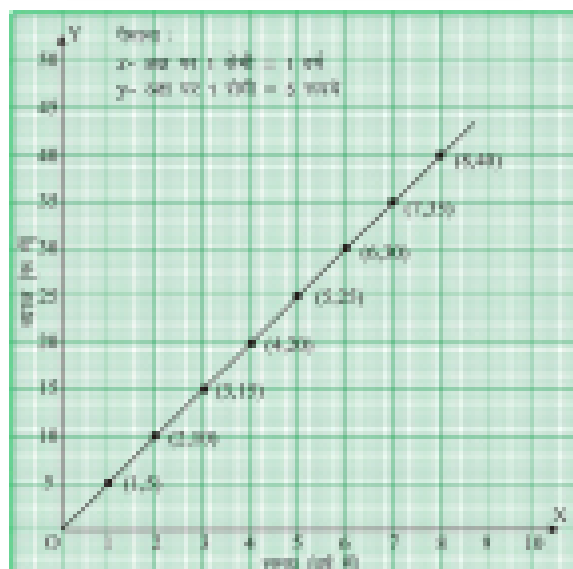
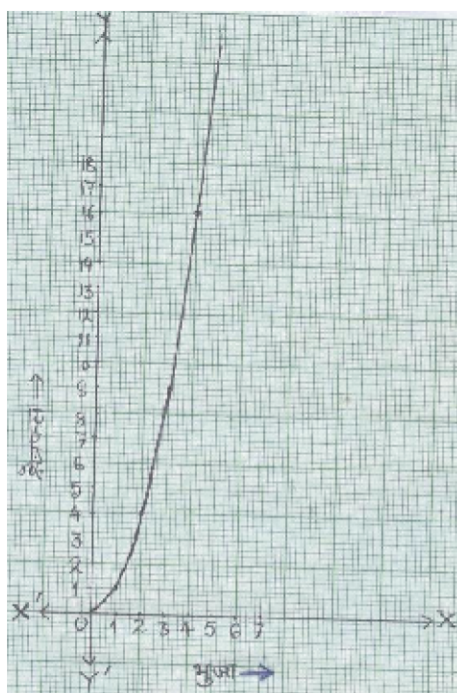
सारणी में दिये गयें े के मानों को भुज मान कर तथा संगत क्षेत्रफल ब् को कोटि मानकर बिन्दुओं (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25), (6, 36), (7, 49) ...... को ग्राफ पेपर पर अंकित करते हैं, जो निम्नांकित चित्र में दर्शाया गया है। इन बिन्दुओं से होकर जाने वाला वक्र ही वर्ग की भुजा और क्षेत्रफल के सम्बन्ध का आलेख हैः-

उदाहरण 4: दिये गए मूलधन पर दी गई ब्याज दर से समय और साधारण ब्याज के सम्बन्ध का ग्राफ द्वारा निरूपण कीजिए।

हल : दिये गए मूलधन, माना 100 रुपये पर, 5 प्रतिशत प्रति वर्ष की दर से साधारण ब्याज डएग्स्ज्त घ्ूीाॅ मिलता है तो इस सम्बन्ध को घ् = 5 ॅ से निरूपित किया जा सकता है। समय ॅ के विभिन्न मानों के संगत घ् = 5 ॅ का मान ज्ञात करके निम्नांकित सारणी के रूप में लिखते हैं ।

ॅ (वर्षों में) 1 2 3 4 5 6 7 8

घ् = 5 ॅ (रुपयों में) 5 10 15 20 25 30 35 40

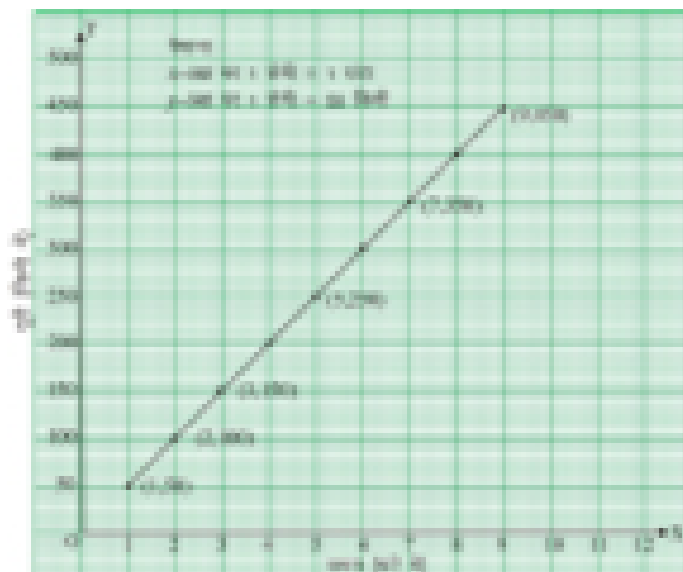
प्राप्त बिन्दुओं (1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20), (5, 25), (6, 30), (7, 35), (8, 40) को ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर वर्षांे और प्राप्त ब्याज के सम्बन्ध का आलेख एक रेखा के रूप में होता है।

उदाहरण 5 : एक गतिशील कार 1 घंटे में 50 किमी दूरी तय करती है। कार द्वारा तय की गई दूरी और समय के सम्बन्ध को ए = 50ॢ से प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ पर समय ॢ घन्टों में और दूरी ए किमी में है। इस सम्बन्ध को ग्राफ पेपर पर निरूपित कीजिए। ॢ के विभिन्न मानों के लिए तय दूरी को निम्नांकित सारिणी में दर्शाया गया है ।

समय **t 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10**
(घन्टों में)

दूरी S=50 t 50 100 150 200 250 300 350 400 450 500

(किमी में)

हल : प्राप्त बिन्दुओं (1, 50), (2, 100), (3, 150), (4, 200), (5, 250), ... को अग्रांकित ग्राफ पेपर पर अंकित करने पर समय और दूरी के

सम्बन्ध का ग्राफ प्राप्त होता है जो एक रेखा से दर्शाया गया है।

अभ्यास 17 (ं)

1. किसी समबाहु त्रिभुज की भुजा की लम्बाई े सेमी है। त्रिभुज की भुजा और परिमाप के सम्बन्ध का ग्राफ खींचिए ।

2. एक आयत की लम्बाई उसकी चौड़ाई से दुगुनी है। आयत के क्षेत्रफल और चौड़ाई के सम्बन्ध का ग्राफ खींचिए ।

(संकेत - आयत का क्षेत्रफल $A = 2x \ r \ x = 2x^2$)

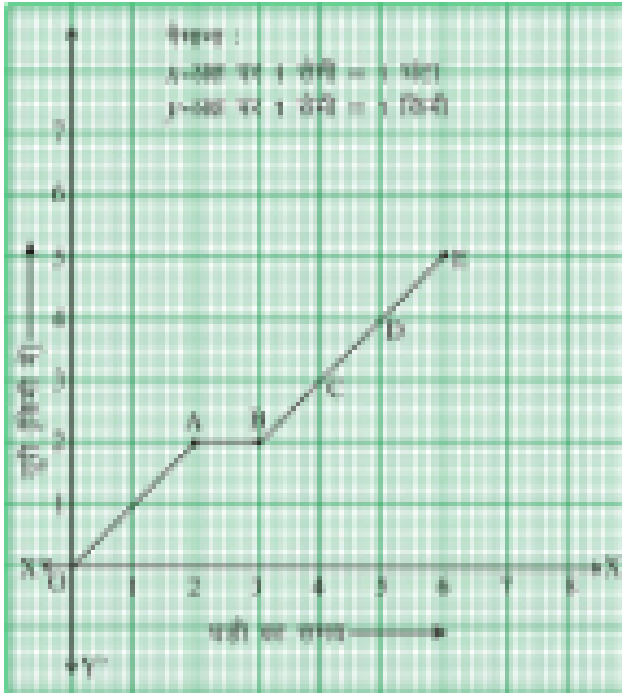
3. 200 रुपये का 3 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से साधारण ब्याज और वर्षों में समय के सम्बन्ध का ग्राफ खींचिए।

4. एक बस 1 घण्टे में 40 किमी की दूरी तय करती है। बस द्वारा चली गई दूरी और समय के सम्बन्ध का ग्राफ खींचिए ।

5. एक साइकिल सवार द्वारा नियत समय अन्तराल में तय की गई दूरी का निम्नवत् दूरी- समय ग्राफ देखकर निम्नांकित प्रश्नों का उत्तर दीजिए।

(a) समय 2 बजे, 3 बजे, 4बजे, 5 बजे यात्रा की प्रारम्भिक स्थिति से दूरी बताइए।

(ं) उपर्युक्त ग्राफ देखकर साइकिल सवार द्वारा यात्रा के दौरान आराम करने का समय-अन्तराल भी बताइए।

टिप्पणी : प्रश्न 1 से लेकर 4तक के ग्राफ शिक्षार्थी स्वयं खींचे।

हमने क्या चर्चा की ?

1. कार्तीय तल का प्रतिपादन प्रâांसीसी गणितज्ञ रेने देकार्ते ने किया।
2. किसी तल में स्थित किसी बिन्दु का निर्धारण करने के लिए उस तल में क्षैतिज तथा ऊध्वाधर दो रेखाएँ खींची जाती हैं और ऐसे तल को कार्तीय तल कहते हैं।
3. कार्तीय तल में स्थित क्षैतिज रेखा 2021.ज्हु र्को े-अक्ष कहते हैं।

 कार्तीय तल में स्थित ऊध्वाधर रेखा 2026.ज्हु को ब्-अक्ष कहते हैं।

 कार्तीय तल में स्थित किसी बिन्दु के निर्देशांक को *(x, y)* के रूप में लिखते हैं।

 निर्देशांक (*x*, *y*) में े भुज होता है तथा ब् कोटि होती है।

4. मूल बिन्दु का निर्देशांक (0, 0) होता है।
5. ग्राफ द्वारा कुछ वास्तविक सम्बन्धों का निरूपण कर सकते हैं।

ष्टाझ्ञ्ज् ½झ्झ्°झ्झ्

अभ्यास 17 (a)

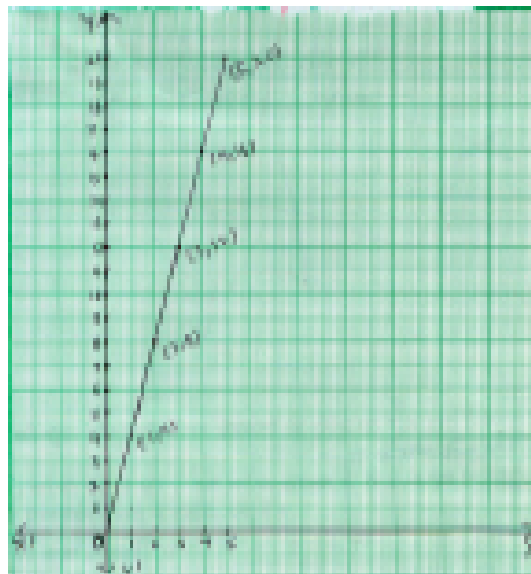
1. (i) ऋणात्मक, (ग्ग्) 3, (ग्ग्ग्) ऋणात्मक, 2 (ग्न्) चतुर्थ (न्) 4. 2. (ग्) 2, 1 निर्देशांक(2, 1) (ग्ग्) -3, 2 निर्देशांक (-3, 2) (ग्ग्ग्) -5, -3 निर्देशांक (-5, -3) (ग्न्) 3, -2निर्देशांक (3, -2) 3. (ग्) तीसरा (ग्ग्) दूसरा (ग्ग्ग्) चतुर्थ (ग्न्) पहला, (न्) दूसरा, (न्ग्)तीसरा

अभ्यास 17 (b)

5. (a) 2 किमी, 2 किमी, 3 किमी, 4किमी, (ं) 1 घण्टा (2 से 3 बजे के बीच में)

6. ग्राफ को पढ़कर दी गई दो सूचनाओं के मध्य सम्बन्ध निर्धारित किया जा सकता है।

चित्र 17.1

चित्र 17.4
चित्र 17.3

परिमाप (y)

इकाई - 18 क्षेत्रमिति (मेंसुरेशन)

समलम्ब का क्षेत्रफल

वृत्त की परिधि एवं व्यास में सम्बन्ध

वृत्त का क्षेत्रफल

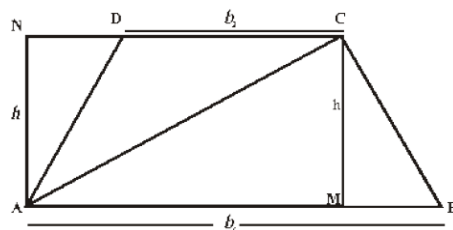
लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

18.1 भूमिका

पिछली कक्षा में हमने समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र ज्ञात करने के लिए इसके समान आधार और समान ऊúचाई के आयत के क्षेत्रफल के सूत्र का प्रयोग किया था। उसी प्रकार किसी समलम्ब चतुर्भुज के क्षेत्रफल का सूत्र निकालने में समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल से सम्बन्धित तथ्यों का प्रयोग करेंगे। प्राय: अनुभव करने पर ऐसा प्रतीत होता हैð कि आयत की तुलना में वृत्त का अध्ययन कुछ कठिन होता है उसी प्रकार घनाभ की तुलना में आतिपरिचित ठोसों, बेलन, शंकु आदि के अध्ययन में कुछ कठिनाइयाँ सम्मुख आती हैं। इन ठोसों के अध्ययन में वास्तविक कठिनाई तब आती है जब हम बेलन, शंकु आदि के पð४ीय क्षेत्रफलों और आयतन के विषय में बात करते हैं। कारण यह है कि व‰ाŠपð४ का क्षेत्रफल एक नवीन धारणा है। हम देखेंगे कि जिन ठोसों की विवेचना की जा रही है, उनके लिए सदðव एक ऐसा तुल्य समतल क्षेत्र प्राप्त करना सम्भव होता है जिसके आधार पर व‰ाŠपð४ का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सके।

इस पाठ में हम समलम्ब का क्षेत्रफल, वृत्त की परिधि एवं व्यास में सम्बन्ध, वृत्त का क्षेत्रफल, लम्ब वृत्तीय बेलन व शंकु का सम्पूर्ण पð४ एवं आयतन के लिए जो सूत्र विकसित करेंगे अथवा जिनका कथन देंगें वे हमारे दðनिक जीवन में अत्यन्त लाभप्रद है ‡‹योंकि पग-पग पर हमारा सामना ऐसी आ‡ðŠतियों से प्राय: होता रहता है।

18.2 समलम्ब का क्षेत्रफल

इन्हें देखिए और निष्कर्ष निकलिए

पाश्वाÄंकित चित्र समलम्ब ABCD को देखिए।

इस चतुर्भुज में AB II DC तथा AD और BC असमान्तर भुजाएँ हैं। समान्तर भुजाआें AB और DC में से किसी एक भुजा को समलम्ब का आधार कहते हैं। इन समान्तर भुजाआें के बीच की दूरी को समलम्ब की ऊúचाई कहा जाता है। चित्र में इस ऊúचाई AN = CM = h से प्रदर्शित किया गया है।

हम देखते हैं कि विकर्ण AC द्वारा समलम्बीय क्षेत्र ABCD को दो त्रिभुजीय क्षेत्र ABC और ACD में बाúट दिया गया है।

अत: समलम्ब ABCD का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल + त्रिभुज ACD का क्षेत्रफल

मान लिया AB = b1 और DC= b_2

$\left(\frac{-8+9}{12}\right)+\left(\frac{-1}{5}\right)$ का क्षेत्रफल = $b_1 \times h$

और $\overline{3 \times 3}$ का क्षेत्रफल = $b_2 \times h$

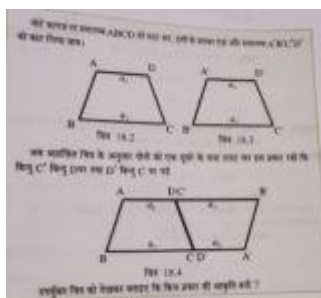
अत: समलम्ब ABCD का क्षेत्रफल = $b_1 \times h + b_2 \times h$

= $(b_1 + b_2)\, h$

अत:

समलम्ब का क्षेत्रफल = 0.5(समान्तर भुजाआें का योग) x ऊúचाई

इन्हें भी देखिए, चर्चा कीजिए और निष्कर्ष निकलिए

दूसरी विधि

दो समान समलम्ब से मिलकर एक समान्तर चतुर्भुज बनता है।

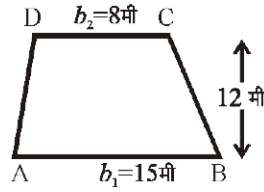
एक समलम्ब का क्षेत्रफल = (समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल)

= $\frac{1}{2}$ (आधार x संगत ऊúचाई)= $1/2(a_1 + a_2) \times$ संगत ऊúचाई

अत:

समलम्ब का क्षेत्रफल = 1/2 (समान्तर भुजाआें का योग) xऊúचाई

उदाहरण : समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 15 मी और 8 मी हैं, उनके बीच की दूरी 12 माé है। समलम्ब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

चित्र 18।5

हल : समलम्ब का क्षेत्रफल A $=1/2(b_1 + b_2) \times h$

यहा $b_1 = 15$ मी, $b_2 = 8$ मी और $h = 12$मी

अत: A = 1/2 (15+8)x12 मी2

= 138 मी2

उदाहरण 2 : ऊúचाई 3 सेमी वाले एक समलम्ब का क्षेत्रफल 12 सेमी2 है। यदि समान्तर भुजाआ ें में से एक 3 सेमी हो, तो दूसरी की लम्बाई ‡‹या है ?

हल : हम जानते हैं कि समलम्ब के लिए

क्षेत्रफल $=1/2(b_1 + b_2) \times h$

यहाú

क्षेत्रफल = 12सेमी2, h = 3 सेमी

अत:

$= \frac{2 \times 12}{3}$ सेमी

= 8 सेमी

किन्तु b1 = 3 सेमी

इसलिए b2 = 8 सेमी - 3 सेमी = 5 सेमी

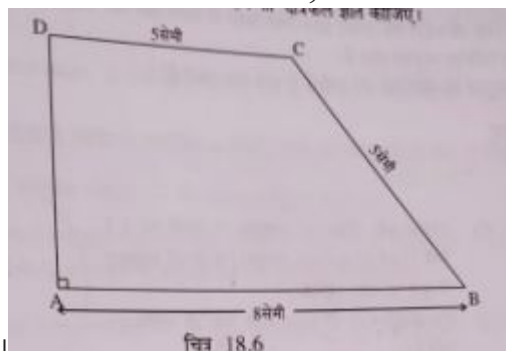
अत: समलम्ब की दूसरी भुजा 5 सेमी है।

अभ्यास 18 (a)

1। एक समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 3 सेमी और 4 सेमी हैं। इनके बीच की दूरी 3 सेमी है। समलम्ब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

2.3 सेमी ऊúचाई के समलम्ब का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी है। इसकी समान्तर भुजाआ ें में से एक भुजा की लम्बाई 9 सेमी है। दूसरी समान्तर भुजा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

3। निम्नांकित चतुर्भुज ABCD में AB II CDऔर , AB = 8 सेमी, BC = DC = 5 सेमी।

चित्र 18.6

चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

4. एक समलम्ब की समान्तर भुजाएँ 8 मी और 6 मी हैं, और इसकी ऊ‌ंचाई 4 मी है। समलम्ब का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

18.3 वृत्त की परिधि और व्यास में सम्बन्ध

प्रयास कीजिए

पाश्वांकित चित्र को देखिए तथा निम्नांकित प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(i) वृत्त का केन्द्र कौन-सा बिन्दु है ?

(ii) वृत्त की त्रिज्याओं के नाम बताइए।

(iii) वृत्त का व्यास बताइए।

(iv) वृत्त की त्रिज्या और व्यास में सम्बन्ध बताइए।

(v) यदि वृत्त की त्रिज्या r हो, तो वृत्त का व्यास r के पदों में अभिव्यक्त कीजिए।

(vi) यदि वृत्त का व्यास D हो, तो वृत्त की त्रिज्या कितनी होगी।

करीम ने अपने तांगे की पहियों पर 112 सेमी व्यास की हाल लगवाने के लिए गोपी लुहार से पूछा कि हाल के लिए लोहे की कितनी लम्बी पट्टी लगेगी ?

गोपी लोहे की पट्टी की लम्बाई हाल तैयार करने से पहले ज्ञात कर सकता है, क्योंकि वृत्त की परिधि और व्यास में एक निश्चित अनुपात होता है।

इस अनुपात को नीचे दिये गये प्रयोगों से ज्ञात कर सकते हैं।

इन्हें कीजिए

क्रिया विधि

(i) परकार और पेंसिल की सहायता से दफ्ती पर 3.5 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाइए। कैंची की सहायता से वृत्त को काट लीजिए।

(ii) टेप अथवा धागे की सहायता से वृत्त की परिधि को नपिए।

नापने पर वृत्त की परिधि = 22 सेमी (लगभग)

वृत्त का व्यास = 7 सेमी

इस प्रकार वृत्त की परिधि और व्यास में अनुपात लगभग निम्न है -

(लगभग)

इन्हें भी कीजिए

दफ्ती पर इसी प्रकार भिन्न-भिन्न माप के तीन या तीन से आधिक वृत्त और बनाइए। कैंची से वृत्तों को कटिए।

इन वृत्तों की परिधि और व्यास को माप कर निम्नांकित सरिणी को पूरा कीजिए।

उपर्यु‡‹त सरिणी में हम देखते हैं कि वृत्तों की परिधि और व्यास का अनुपात लगभग 22/7 है।

इस प्रकार उपरोक्त प्रयोगों से दो निष्कर्ष निकलते हैं:

(i) वृत्त की परिधि का उसके व्यास से अनुपात सभी वृत्तों के लिए एक ही होता है, इनकी माप कुछ भी क्यों न हो।

(ii) $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ से प्राप्त संख्या, जो सभी वृत्तों के लिए एक ही होती है, का मान लगभग 3.14 होता है।

इस अनुपात को यूनानी भाषा के वर्णाक्षर π (पाई) द्वारा व्यक्त करते हैं। यह अपरिमेय है परन्तु गणना हेतु इसका मान परिमेय संख्या $\frac{22}{7}$ के लगभग लिया जाता है।

π (पाई) का चार स्थान तक शुद्ध मान 3.1416 है जिसे भारतीय गणितज्ञ **आर्यभट्ट** ने ज्ञात किया था। π का शुद्धतम मान ज्ञात नहीं किया जा सकता है, क्योंकि यह एक **अपरिमेय संख्या** है।

टिप्पणी : गणितज्ञों ने यह तथ्य काफी पहले ही जान लिया था कि वृत्तों की माप से स्वतंत्र, अनुपात $\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}}$ सभी वृत्तों के लिए एक ही होता है। तथापि इसे सिद्ध बहुत बाद में किया गया, तब जब कि वक्र की लम्बाई की धारणा को ही एक नया अर्थ दिया गया। ऊँची कक्षाओं में जाने पर आप इसकी उत्पत्ति सीखेंगे। अभी तो आपके द्वारा प्रयोगों के आधार पर प्राप्त परिणाम को ही बिना उत्पत्ति के सत्य स्वीकार किया जा सकता है।

अर्थात

$$\frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$$

या, परिधि $= \pi \times$ व्यास

या, परिधि $= 2\pi r$ (r वृत्त की त्रिज्या है।)

संख्या π परिमेय नहीं है।

यह तथ्य एक जर्मन गणितज्ञ जोहान लैम्बर्ट ने बहुत समय बाद 1766 में सिद्ध किया।

आरम्भ के गणितज्ञ π का कोई सन्निकट मान प्रयुक्त करते थे। बेबीलोनियनों ने इस अनुपात (अर्थात π) को 3 माना। आरम्भ के यूनानियों ने π को $\frac{22}{7}$ या 3.14 माना। आर्किमिडीज (ईसा-पूर्व तीसरी शताब्दी) ने दिखाया कि π का मान $3\frac{1}{7}$ तथा $3\frac{10}{71}$ के मध्य स्थित है। एक श्रेष्ठतर सन्निकट मान एक भारतीय गणितज्ञ आर्यभट्ट (476 ई.-550 ई.) ने दिया। इस मान के विषय में उन्होंने यह नियम दिया : 100 में चार जोड़िए, 8 से गुणा कीजिए, 62000 जोड़िए, परिणाम व्यास 20000 वाले वृत्त की परिधि का सन्निकट मान होगा। इस प्रकार उन्होंने π का सन्निकट मान दिया।

$\frac{62832}{20000} = 3.1416$

[illegible] ने [illegible] दशमलव स्थानों तक π का शुद्ध मान दिया। अब कम्प्यूटर की सहायता से π का सन्निकट मान [illegible] ज्ञात की जा चुकी है जो दशमलव के [illegible] स्थानों तक शुद्ध है। 20 स्थान तक शुद्ध π का मान निम्न है

3.14159 26535 89793 23846

अतः यदि अन्यथा न कहा गया हो तो हम गणना के लिए π का मान $\frac{22}{7}$ या 3.14 लिया करेंगे।

अतः π को एक संकेत मानकर परिधि व व्यास तथा परिधि व त्रिज्या में सम्बन्ध निम्नांकित हैं :

> (1) यदि एक वृत्त की परिधि (Circumference) C तथा उसका व्यास (diameter) d हो, तो
>
> $C = \pi d$ तथा $d = \frac{C}{\pi}$
>
> (2) यदि एक वृत्त की परिधि C तथा उसकी त्रिज्या (radius) r हो, तो
>
> $C = 2\pi r$ तथा $r = \frac{C}{2\pi}$

टिप्पणी : चूँकि सभी संख्यात्मक परिकलनों में हम π के एक सन्निकट मान का प्रयोग करेंगे, अतः यह परिणाम, अर्थात C अथवा r का प्राप्त मान केवल एक सन्निकट मान है, चाहे इसे स्पष्ट कहा जाए या नहीं।

उदाहरण 3 : उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है।

हल : ∵ परिधि = $2\pi r$

यहाँ r = 21 सेमी

∴ परिधि = $2\pi \times 21$ सेमी

= $2 \times \frac{22}{7} \times 21$ सेमी

= 132 सेमी

अतः वृत्त की परिधि = 132 सेमी

उदाहरण 4 : दौड़ के लिए वृत्ताकार ट्रैक (रास्ता) ऐसा बनवाना है कि एक चक्कर में 110 मीटर की दौड़ पूरी हो जाए। इस ट्रैक का व्यास कितना होगा ?

हल : वृत्त की परिधि = 110 मीटर

व्यास = $\frac{\text{परिधि}}{\pi}$

व्यास = $\frac{110}{\pi}$ मीटर

= $\frac{110}{\frac{22}{7}}$ मी

= $\frac{110 \times 7}{22}$ मी

= 35मीटर

अतः ट्रैक का व्यास = 35 मीटर

उदाहरण 5 : जिस वृत्त की परिधि 15.7 सेमी है उसका व्यास ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

C = πD

यहाँ C = 15.7 सेमी

D = $\frac{C}{\pi}$ = $\frac{15.7}{22} \times 7$ सेमी

$\frac{109.9}{22}$ सेमी = 5 सेमी (लगभग)

उदाहरण 6 : तार के एक टुकड़े को जो 8.9 सेमी लम्बे तथा 5.4 सेमी चौड़े आयत के रूप में था, नयी आकृति प्रदान कर एक वृत्त के रूप में मोड़ा जाता है। इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : तार की लम्बाई = आयत की परिमाप

= 2 × (8.9 + 5.4) सेमी

= 28.6 सेमी

चित्र 18.9

इन त्रिज्यखंडों को दो बराबर समूहों में बाँट लीजिए। एक समूह के शीर्ष नीचे तथा दूसरे समूह के शीर्ष ऊपर की ओर रख कर निम्नांकित चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।

यह आयताकार क्षेत्र की भाँति दिखाई दे रहा है किन्तु ठीक-ठीक आयत नहीं है। क्यों ?

18.12

चित्र 18.13

यदि इसी प्रकार से और अधिक त्रिज्यखंड करके व्यवस्थित करने की कल्पना करें तो हम आयताकार क्षेत्र के बिल्कुल पास होंगे। इस प्रकार वृत्तीय क्षेत्र आयताकार क्षेत्र के बराबर होगा।

आयताकार क्षेत्र की लम्बाई वृत्त की परिधि की आधी होगी और चौड़ाई वृत्त की त्रिज्या होगी। क्यों ?

मान लिया वृत्त की त्रिज्या = r सेमी

वृत्त की परिधि = $2\pi r$ सेमी

$\frac{1}{2} \times$ (वृत्त की परिधि) = πr सेमी

या आयताकार क्षेत्र की लम्बाई = πr सेमी

और आयताकार क्षेत्र की चौड़ाई = r सेमी

आयताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\pi r \times r$ सेमी^{2}

= πr^2 सेमी^{2}

अतः वृत्त का क्षेत्रफल = πr^2 सेमी^{2}

वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times$ त्रिज्या^{2}

= πr^2

क्षेत्रफल सम्बन्धी सरल प्रश्न

उदाहरण 7 : घास के मैदान में एक खूँटे से बँधी एक गाय 10.5 मी दूरी तक घास चर सकती है। वह कितने क्षेत्रफल की घास चर सकती है ?

हल : गाय 10.5 मीटर त्रिज्या के वृत्ताकार क्षेत्र की घास चर सकेगी।

त्रिज्या = 10.5 मी

= $\frac{21}{2}$ मी

अभीष्ट क्षेत्रफल = $\pi \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ मी^{2}

= $\frac{22}{7} \times \frac{21}{2} \times \frac{21}{2}$ मी^{2}

= $\frac{693}{2}$ मी^{2}

= **346.5 मी^{2}**

उदाहरण 8 : एक वृत्ताकार [illegible] घर के फर्श का क्षेत्रफल 55 वर्ग मी है। कमरे की भीतरी त्रिज्या दशमलव के दो स्थान तक शुद्ध ज्ञात कीजिए, जब कि दिया है $\pi = \frac{22}{7}$

हल : मान लीजिए कि त्रिज्या = r मी

$\therefore \pi r^2 = 55$

$\frac{22}{7} \times r^2 = 55$

$r^2 = \frac{55 \times 7}{22}$

$= 2.5 \times 7 = 25 \times 0.7$

$r = 5 \times \sqrt{0.7}$

$= 5 \times 0.8366 = 4.18$

अतः भीतरी त्रिज्या = 4.18 मी

उदाहरण 9 : त्रिज्या 2.1 सेमी वाले एक वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = πr^2

यहाँ $r = 2.1$ सेमी, तथा हम $\pi = \frac{22}{7}$ ले रहे हैं।

वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 2.1 \times 2.1$ सेमी^{2}

= 13.86 सेमी^{2}

उदाहरण 10 : एक वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल 154 सेमी² है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल A निम्न होता है।

$$A = \pi r^2$$

$$\therefore r = \sqrt{A \div \pi}$$

यहाँ A = 154 सेमी² है। $\pi = \frac{22}{7}$ मान लीजिए।

तब $r = \sqrt{154 \times \frac{7}{22}}$ सेमी = 7 सेमी

अत: वृत्त की त्रिज्या 7 सेमी है।

उदाहरण 11 : एक वृत्ताकार मैदान की त्रिज्या 56 मी है। मैदान के बाहर चारों ओर 7 मी चौड़ी सड़क बनी है। सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : छोटे वृत्त की त्रिज्या = 56 मी

बड़े वृत्त की त्रिज्या = (56 + 7) मी = 63 मी

चित्र 18.14

अब छोटे वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 56 \times 56$ मी²

बड़े वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 63 \times 63$ मी²

सड़क का क्षेत्रफल = $\frac{22}{7} \times 63^{[illegible]} - \frac{22}{7} \times 56^{[illegible]}$

= $\frac{22}{7}(63^2 - 56^2)$ मी²

= $\frac{22}{7}(63-56)\times(63+56)$ मी²

= $\frac{22}{7} \times 7 \times 119$ मी²

= **2618 मी²**

प्रयास कीजिए :

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

क्रम संख्या	वृत्त की परिधि	वृत्त की त्रिज्या	वृत्त का क्षेत्रफल
1.	-	3.5 सेमी	-
2.	-	-	154मी²
3.	3.14 मी	-	-
4.	-	-	12.56मी²
5.	-	2.5मी	-

अभ्यास 18 (C)

1. उस वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल बताइए जिसका व्यास 14 सेंमी है।

2. एक वृत्ताकार दफ्ती का क्षेत्रफल 9[illegible] वर्ग सेंमी है। उसका व्यास बताइए।

3. 28 सेमी भुजा की लोहे की वर्गाकार चादर से [illegible] बड़ा वृत्ताकार [illegible] तवा तैयार करता है। तवे का क्षेत्रफल बताइए। कितनी चादर बची रहेगी ?

   संकेत - तवे का व्यास = वर्ग की भुजा

4. एक अर्ध वृत्ताकार साइनबोर्ड की रंगाई का खर्च 15 पैसा प्रति वर्ग सेमी की दर से ₹. 49.50 है। यदि भीतरी अर्धवृत्त की त्रिज्या 14 सेमी हो, तो बोर्ड की चौड़ाई बताइए।

   चित्र 18.15

5. एक वर्ग और एक वृत्त के परिमाप समान हैं। यदि दोनों के परिमाप 44 सेमी हों, तो किसका क्षेत्रफल अधिक होगा और कितना ?

6. एक वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल दूसरे वृत्ताकार क्षेत्र के क्षेत्रफल का 100 गुना है। उनकी परिधियों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

7. एक प्लास्टिक की आयताकार शीट 36 सेमी × 24 सेमी माप की है। इसमें से 1 सेमी व्यास के 864 वृत्ताकार बटन काट कर निकाल लिए गये हैं। बची शीट का क्षेत्रफल बताइए।

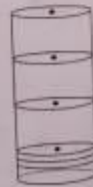
8. एक वृत्ताकार थाली का व्यास 28 सेमी है। उस वृत्ताकार तश्तरी का व्यास बताइए, जिसका क्षेत्रफल इसका आधा हो।

नीचे कुछ वस्तुओं की आकृतियाँ दी गयी हैं। इन्हें देखिये और इसी प्रकार की अपने पास-पड़ोस में पायी जाने वाली अन्य वस्तुओं के भी नाम बताइए।

चित्र 18.16

इन आकृतियों की वस्तुओं के मुख्य भाग आकार में समान हैं और इनके आकार बेलनाकार हैं।

इन्हें कीजिए

प्रयोग 1 : दफ्ती के समान मोटाई वाली शीट के समान त्रिज्या वाले वृत्ताकार टुकड़ों को काटिए। इन वृत्ताकार टुकड़ों को काट कर एक दूसरे के ऊपर इस प्रकार रखिए कि एक दूसरे को पूरा-पूरा ढँक ले और देखिए कि निर्मित आकृति बेलन है अथवा नहीं। हम देखते हैं कि इस प्रकार निर्मित आकृति बेलनाकार है।

चित्र 18.17

वृत्तीय समतल परिच्छेद (Cross-section) की त्रिज्या को बेलन की त्रिज्या कहते हैं। पार्श्व चित्र में बेलन की त्रिज्या बताइए।

बेलन के वृत्तीय समतल परिच्छेद के केन्द्र से हो कर जाने वाली रेखा को बेलन का अक्ष कहते हैं। पार्श्व चित्र में बेलन के अक्ष का नाम बताइए।

बेलन का निचला वृत्ताकार तल आधार कहलाता है। बेलन में कितने आधार होंगे?

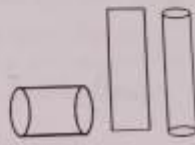
बेलन को उलट देने पर इसका ऊपरी तल आधार बन जायेगा।

बेलन के दोनों आधारों के बीच की दूरी को बेलन की लम्बाई या बेलन की ऊँचाई (h) कहते हैं।

चित्र 18.18

यदि बेलन का अक्ष प्रत्येक वृत्तीय परिच्छेद के लम्बवत् है तो बेलन को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते हैं।

यहाँ हम लम्ब वृत्तीय बेलन को केवल बेलन कहेंगे।

प्रयोग 2 : एक आयताकार मोटा कागज लीजिए। कागज की चौड़ाई को मोड़कर चित्रानुसार (पार्श्व चित्र) बेलन बनाइये। देखिए आयताकार कागज की लम्बाई बेलन की ऊँचाई और आयताकार कागज की चौड़ाई बेलन के आधार की परिधि है।

चित्र 18.19

इसी प्रकार यदि लम्बाई को मोड़ कर बेलन बनायें, तो बेलन की ऊँचाई और परिमाप क्या होगा?

आयताकार कागज को उसकी एक भुजा के परितः घुमायें तो किस प्रकार की आकृति निर्मित होगी?

हम देखते हैं कि आयताकार कागज को उसकी एक भुजा के परितः घुमाने पर भी एक लम्ब वृत्तीय बेलन बनता है।

अतः

> **किसी आयत को उसकी एक भुजा के परितः घुमाने से बने ठोस को लम्ब वृत्तीय बेलन कहते हैं। जिस भुजा के परितः घुमाया जाता है, उस भुजा की लम्बाई बेलन की ऊँचाई तथा दूसरी भुजा बेलन के आधार की त्रिज्या होती है।**

लम्ब वृत्तीय बेलन का उपरोक्त वर्णन हमारे मस्तिष्क के सम्मुख दो भिन्न-भिन्न किन्तु संबंधित आकृतियाँ उपस्थित करता है। खोखला बेलन तथा ठोस बेलन।

18.5.2 लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन

मान लीजिए कि बेलन की ऊँचाई h मात्रक और त्रिज्या r मात्रक है।

हम जानते हैं कि घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई

397

किन्तु लम्बाई × चौड़ाई = घनाभ के आधार का क्षेत्रफल

अतः घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

उपर्युक्त परिणाम बेलन के लिए भी लागू होता है।

अतः बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

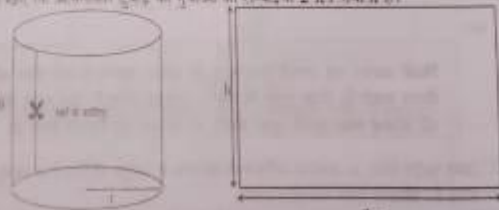
= $\pi r^2 \times h$ घन मात्रक

= $\pi r^2 h$ घन मात्रक

अतः

बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

18.5.3 लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ

पार्श्वांकित बेलन को देखिए। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ इसके वक्र पृष्ठ और समतल पृष्ठों को मिला कर बना है। बेलन के दो समतल पृष्ठ समान त्रिज्या के वृत्त हैं।

इस प्रकार बेलन के दोनों समतल पृष्ठों का क्षेत्रफल

= $\pi r^2 + \pi r^2$ (r वृत्त की त्रिज्या)

= $2\pi r^2$

चित्र 18.20

अब कागज का एक खोखला बेलन बनाइए। टेप से जोड़ कर बेलन पर ऊँचाई के समान्तर एक रेखा खींचिए। इस रेखा खंड के अनुदिश कैंची से बेलन को काटिए और उसे खोलिए। देखिए [illegible] से एक आयताकार [illegible]

आप भी देख लें कि आयताकार टुकड़े की भुजाओं की लम्बाईयाँ $2\pi r$ तथा h हैं।

चित्र 18.21

18.22

इस प्रकार बेलन के वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = $2\pi r \times h$

= $2\pi r h$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = बेलन का वक्रपृष्ठ + दोनों समतल पृष्ठों का क्षेत्रफल

= $2\pi r h + 2\pi r^2$

= $2\pi r(h + r)$

बेलन का वक्रपृष्ठ = $2\pi r h$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ = $2\pi r(h + r)$

उदाहरण 12 : एक बेलन की ऊँचाई 18 सेमी तथा त्रिज्या 10.5 सेमी है। इस बेलन का आयतन, वक्रपृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r = 10.5$ सेमी और $h = 18$ सेमी

∴ बेलन का आयतन = $\pi r^2 h$

= $\left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5 \times 18\right)$ सेमी^{3}

= 6237 सेमी^{3}

वक्रपृष्ठ = $2\pi r h$

= $\left(2 \times \frac{22}{7} \times 10.5 \times 18\right)$ सेमी^{2}

= 1188 सेमी^{2}

आधार का क्षेत्रफल = πr^2

= $\left(\frac{22}{7} \times 10.5 \times 10.5\right)$ सेमी^{2}

= 346.5 सेमी^{2}

सम्पूर्ण पृष्ठ = वक्रपृष्ठ + 2 × आधार का क्षेत्रफल

= (1188 + 2 × 346.5) सेमी^{2}

= (1188 + 693) सेमी^{2}

= **1881 सेमी^{2}**

उदाहरण 13 : 550 घन सेमी लोहे से लम्ब वृत्तीय बेलनाकार सरिया बनाई जाती है। यदि सरिया का व्यास 1 सेमी हो, तो सरिया की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि सरिया की लम्बाई = h सेमी

सरिया (बेलन के आकार में) का आयतन = $\pi \times (0.5)^2 \times h$

प्रश्नानुसार, सरिया का आयतन = लोहे का आयतन

अतः $\pi \times 0.5 \times 0.5 \times h = 550$

या, $\frac{22}{7} \times 0.5 \times 0.5 \times h = 550$

या, $h = \frac{550 \times 7}{22 \times 0.5 \times 0.5}$

या, h = 700 सेमी

= 7 मी

अतः **सरिया की लम्बाई = 7 मी**

प्रयास कीजिए :

बेलन के सम्बन्ध में निम्नांकित सारिणी को पूरा कीजिए :

क्रम संख्या	त्रिज्या	ऊँचाई	वक्रपृष्ठ	सम्पूर्ण पृष्ठ	आयतन
(i)	7 सेमी	7 सेमी	-	-	-
(ii)	7 सेमी	-	-	-	3080 घन सेमी
(iii)	-	15 सेमी	1320 वर्ग सेमी	-	-

अभ्यास 18 (d)

1. एक लम्ब वृत्तीय बेलन के आधार का क्षेत्रफल 100 वर्ग सेमी है। यदि बेलन की ऊँचाई 10 सेमी है, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।
2. एक वर्गाकार कागज जिसकी भुजा 25 सेमी है, उसको मोड़ कर बेलन बनाया गया है। बने बेलन का वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
3. एक लम्ब वृत्तीय बेलनाकार ड्रम का व्यास 55 सेमी तथा लम्बाई 120 सेमी है। इस ड्रम में कितने लीटर पानी आयेगा ?
4. यदि एक रोलर का व्यास 70 सेमी और लम्बाई 2मी है, तो बताइए कि 50 चक्कर में रोलर कितने वर्ग मीटर चलेगा।
5. 3 मीटर व्यास का 14 मीटर गहरा कुआँ 30 रुपया प्रति घन मीटर की दर से खोदने में कितना रुपया खर्च होगा?
6. एक 11 सेमी व्यास वाले बेलनाकार बर्तन में कुछ पानी भरा है। यदि 5.5 सेमी भुजा का एक घनाकार ठोस पूरी तरह पानी में डुबो दिया जाय, तो बर्तन में पानी की सतह कितनी ऊपर उठ जायेगी ?
7. एक 17 सेमी लम्बे और 7 सेमी चौड़े आयत को चौड़ाई के परितः घुमाने पर बने बेलन का आयतन और वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
8. यदि एक लम्बवृत्तीय बेलन के आधार की त्रिज्या 7 सेमी तथा ऊँचाई 14 सेमी हो, तो बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
9. एक लम्बवृत्तीय बेलन का वक्रपृष्ठ 1320 वर्ग सेमी है। यदि बेलन की ऊँचाई 15 सेमी हो, तो बेलन के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

18.6 लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन एवं सम्पूर्ण पृष्ठ

हम जोकर की टोपी, आइसक्रीम कोन, चुमुरे की पुड़िया, आदि बहुत सी वस्तुओं को देखते हैं। इस प्रकार की वस्तुओं को लम्ब वृत्तीय शंकु के आकार वाली वस्तुएँ कहा जाता है। इनका आधार वृत्ताकार और पार्श्व पृष्ठ वक्र होता है।

अपने पास-पड़ोस की लम्बवृत्तीय शंकु के आकार की कुछ और वस्तुओं के नाम बताइए।

समकोण त्रिभुज के आकार की दफ्ती का एक टुकड़ा लीजिए। उसे समकोण बनाने वाली किसी भुजा के परितः घुमाइए। निर्मित ठोस शंकु है अथवा नहीं ?

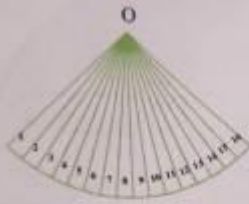
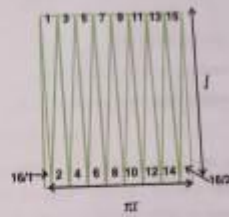
चित्र 18.23

पार्श्व चित्र को देखिए। इस चित्र में समकोण त्रिभुज VOD को भुजा VO के परितः घुमाने से कर्ण VD की भिन्न-भिन्न स्थितियाँ VD_1, VD_2, VD_3 .... आदि दिखाई गई हैं। ये एक वक्र पृष्ठ का निर्माण कर रही हैं। भुजा OD एक चक्कर पूर्ण कर लेने पर वृत्ताकार समतल क्षेत्र का निर्माण करती है।

इस प्रकार

समकोण त्रिभुज को यदि समकोण बनाने वाली उसकी एक भुजा के परितः घुमाया जाय तो इसके द्वारा निर्मित ठोस को लम्बवृत्तीय शंकु कहते हैं।

401

सोलहवें त्रिज्यखंड के दो बराबर भाग कर के एक भाग (16/1)को प्रारम्भ में तथा दूसरे भाग (16/2)को अन्त में चित्रानुसार व्यवस्थित कीजिए।

चित्र 18.29

चित्र 18.30

बताइए

(i)इस आयत की लम्बाई कितनी होगी ?

(ii) इस आयत की चौड़ाई कितनी होगी ?

हम देखते हैं कि इस आयत की लम्बाई $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$ है तथा चौड़ाई l है।

अत: शंकु का पार्श्वपृष्ठ (तिरछा पृष्ठ)

= आयत का क्षेत्रफल

= $\pi r \times l$

= $\pi r l$ वर्ग मात्रक

शंकु का पार्श्व पृष्ठ = $\pi r l$

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ

= पार्श्व पृष्ठ + आधार का क्षेत्रफल

= $\pi r l + \pi r^2$

= $\pi r (l + r)$ वर्ग मात्रक

अत:

शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ = $\pi r (l + r)$

14 : एक शंकु के आधार की त्रिज्या 3.5 सेमी तथा ऊँचाई 12 सेमी है। शंकु का आयतन तथा वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

चित्र 18.31

शंकु की ऊँचाई h = 12 सेमी

शंकु की त्रिज्या r = $\frac{7}{2}$ सेमी

तिरछी ऊँचाई l = $\sqrt{h^2 + r^2}$ (सूत्र)

= $\sqrt{12^2 + \frac{7}{2}^2}$

= $\sqrt{144 + \frac{49}{4}}$

= $\sqrt{\frac{625}{4}}$

= $\frac{25}{2}$

= **12.5 सेमी**

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (सूत्र)

$= \frac{1}{3}\pi \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 12$ घन सेमी

$= \frac{1}{3}\pi \times \frac{49}{4} \times 12$ घन सेमी

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times \frac{49}{4} \times 12$ घन सेमी

=154 घन सेमी

शंकु का वक्र पृष्ठ $= \pi r l$ (सूत्र)

$= \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{25}{2}$

= 137.5 वर्ग सेमी

उदाहरण 15 : 15 मीटर ऊँचे शंक्वाकार तम्बू के आधार की परिधि 44 मीटर है। इस तम्बू को तैयार करने के लिए कितनी कैनवस की आवश्यकता होगी ? तम्बू में आबद्ध वायु का आयतन भी ज्ञात कीजिए।

हल :

आधार की परिधि $= 2\pi r$

$\therefore$ प्रश्नानुसार, $2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$\therefore \quad r = \frac{44 \times 7}{2 \times 22}$

$\therefore \quad r = 7$ मी

तिरछी ऊँचाई $= \sqrt{h^2 + r^2}$

$= \sqrt{15^2 + 7^2}$

$= \sqrt{225 + 49}$

$= \sqrt{274}$ मी

अतः कैनवस का क्षेत्रफल $=$ शंकु का वक्रपृष्ठ

$= \pi r l$

$= \frac{22}{7} \times 7 \times \sqrt{274}$

$= 22\sqrt{274}$ वर्ग मी

तम्बू द्वारा आबद्ध वायु का आयतन

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^2 \times 15$

$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 15$

$= 770$ घन मी

सामूहिक चर्चा कीजिए

1. एक शंकु की तिरछी ऊँचाई 5 सेमी और ऊँचाई 3 सेमी है। शंकु के आधार की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
2. किसी समकोण त्रिभुज के कर्ण को छोड़ कर किसी अन्य भुजा के परितः त्रिभुज को घुमाने पर कौन-सी आकृति निर्मित होती है ?
3. समान ऊँचाई और समान त्रिज्या के आधार वाले शंकु तथा बेलन के आयतन में क्या अनुपात होगा ?

अभ्यास 18 (ए)

1. पार्श्वांकित चित्र में दिये गये शंकु का वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए, जब कि VO = 15 सेमी और OB = 8 सेमी है।

चित्र 18.32

2. एक शंकु का आयतन 100 π घन सेमी है। यदि आधार की त्रिज्या 5 सेमी हो, तो उसका वक्रपृष्ठ ज्ञात कीजिए।
3. किसी शंक्वाकार तम्बू के निर्माण के लिए 264 वर्ग मी किरमिच की आवश्यकता पड़ती है। यदि शंकु की तिरछी ऊँचाई 12 मी हो, तो उसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
4. एक जोकर की टोपी शंक्वाकार है। यदि उसमें 840 वर्ग सेमी कपड़ा लगा हो और उसके गोल सिर का परिमाप 56 सेमी हो, तो टोपी की तिरछी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।
5. उस बड़े से बड़े शंकु का आयतन ज्ञात कीजिए, जो उस घन से काटा जाय जिसकी प्रत्येक कोर 12 सेमी लम्बी हो।
6. यदि एक लम्बवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 3 सेमी तथा ऊँचाई 4 सेमी है, तो उसका सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
7. एक लम्बवृत्तीय शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ $301\frac{5}{7}$ वर्ग मीटर तथा उसके आधार की त्रिज्या 6 मीटर है। शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

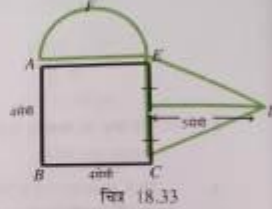
दक्षता अभ्यास - 18

1. निम्नांकित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

   (i) समलम्बाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल = ...

   (ii) एक वृत्त की त्रिज्या r सेमी है। इस वृत्त की परिधि = ... तथा उससे घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल = ...

   (iii) एक बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी तथा ऊँचाई h सेमी है। इस बेलन का आयतन = ... तथा वक्रपृष्ठ = ...

   (iv) एक शंकु की त्रिज्या r सेमी, ऊँचाई h सेमी और तिरछी ऊँचाई l सेमी है। इस शंकु का आयतन = ... वक्रपृष्ठ = ... तथा सम्पूर्ण पृष्ठ = ...

2. पार्श्व चित्र में बनी आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। जहाँ ABCE वर्ग, CDE समद्विबाहु त्रिभुज तथा EFAE एक अर्ध वृत्त है।

चित्र 18.33

3. 5 सेमी आधार त्रिज्या के शंकु के सम्पूर्ण पृष्ठ और वक्र पृष्ठ का अन्तर ज्ञात कीजिए।

4. एक शंकु की ऊँचाई 48 सेमी और आधार का व्यास 28 सेमी है। इस शंकु का आयतन, वक्रपृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

5. एक वृत्ताकार पार्क का व्यास 84 मीटर है। 3.5 मीटर चौड़ी सड़क, पार्क से बाहर चारों ओर बनी हुई है। सड़क का 20 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से मरम्मत कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

6. चित्र 18.34 में 28 सेमी भुजा का एक वर्ग है। इसमें भुजाओं को स्पर्श करता हुआ वृत्त बना है। वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

चित्र 18.34

7. 3.5 मीटर त्रिज्या तथा 20 मी गहराई के कुएं से निकाली गयी मिट्टी को 25 मीटर लम्बे और 16 मीटर चौड़े आयताकार मैदान में फैला दिया जाता है। बताइए मैदान कितनी ऊँचाई तक पट जायेगा, जबकि मिट्टी के आयतन में कोई परिवर्तन नहीं होता है।

8. किसी रोलर का व्यास 2.4 मी तथा लम्बाई 1.68 मी है। यदि किसी मैदान को समतल करने के लिए उसको 1000 पूर्ण चक्कर लगाने पड़ते हैं, तो मैदान का क्षेत्रफल होगा

   (क) 126720 वर्ग मी

   (ख) 12672 वर्ग मी

   (ग) 1267.2 वर्ग मी

   (घ) 12.672 हेक्टेयर

   (एन.टी.एस. 2015)

9. वर्षा जल संग्रह के लिए एक लम्बवृत्तीय बेलनाकार पक्की टंकी बनायी गयी है, जिसके आधार का व्यास 14 मीटर तथा गहराई 9 मीटर है। इस टंकी में कितना लीटर वर्षा का जल एकत्रित होगा ?

10. एक शंक्वाकार तम्बू के आधार की त्रिज्या 3.5 मीटर तथा ऊँचाई 12 मीटर है। कपड़े की दीवार की मोटाई को नगण्य मानते हुए ज्ञात कीजिए कि तम्बू के बाहरी एवं भीतरी दीवारों तथा फर्श पर कीटाणुनाशक दवाओं का छिड़काव करने पर कुल कितना व्यय होगा यदि प्रति वर्गमीटर ₹ 2.5 खर्च होते हैं।

इस इकाई में हमने सीखा

1. समलम्बाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) $\times$ समान्तर भुजाओं के बीच की दूरी

2. वृत्त की परिधि व व्यास में सम्बन्ध $= \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi = \frac{22}{7} = 3.14$ (लगभग)

3. वृत्त की परिधि C $= \pi D$, (जहाँ D वृत्त का व्यास है।)
   $= 2\pi r$, ($D = 2r$, r वृत्त की त्रिज्या है)

4. वृत्ताकार क्षेत्र का क्षेत्रफल $= \pi r^2$, (जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है)

5 (i). लम्ब वृत्तीय बेलन का आयतन $= \pi r^2 h$
   (जहाँ r आधार की त्रिज्या तथा h ऊँचाई है)

   (ii) लम्ब वृत्तीय बेलन का वक्रपृष्ठ $= 2\pi r h$

   (iii) लम्ब वृत्तीय बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2\pi r(h + r)$

6 (i). लम्ब वृत्तीय शंकु का आयतन $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$
   जहाँ r शंकु के आधार की त्रिज्या तथा h ऊँचाई है।

   (ii) लम्ब वृत्तीय शंकु का वक्रपृष्ठ $= \pi r l$ (जहाँ l शंकु की तिरछी ऊँचाई है।)

   (iii) लम्ब वृत्तीय शंकु का सम्पूर्ण पृष्ठ $= \pi r(l + r)$

अभ्यास 18 (a)

1. 10.5 सेमी^{2} **2.** 15 सेमी **3.** 26 सेमी^{2} **4.** 28 वर्ग मी; **6.** 24 सेमी, 12 सेमी

अभ्यास 18 (b)

1. 5.72 मी, **2.** 38.50 मी, **3.** 1000 चक्कर, **4.** 398 डेसीमी, **5.** 2.1 सेमी, **6.** 2413714.28 किमी, **7.** 2 : 3 **8.** 28.70 मी, 90.2 मी **9.** 84040 किमी

अभ्यास 18 (c)

1. 154 डेसीमी^{2} **2.** 3.5 डेसीमी **3.** 616 सेमी^{2}, 168 सेमी^{2} **4.** 6.15 सेमी, **5.** पुल का क्षेत्रफल, 33 वर्ग सेमी

6. 10 : 1 **7.** $185\frac{1}{7}$ सेमी^{2} **8.** $14\sqrt{2}$ सेमी,

अभ्यास 18 (d)

1. 1000 सेमी^{3} **2.** 625 सेमी^{2} **3.** 285.21 लीटर **4.** 220 वर्ग किमी, **5.** रु. 2970, **6.** 1.75 सेमी, **7.** 6358 घन सेमी, 748 वर्ग सेमी, **8.** 924 सेमी^{2}, **9.** 14 सेमी

अभ्यास 18 (e)

1. 136 π वर्ग सेमी **2.** 65π वर्ग सेमी, **3.** 9.75 मी **4.** 30 सेमी, **5.** 452.57 घन सेमी, **6.** 24π वर्ग सेमी, **7.** 8 मी

दक्षता अभ्यास 18

1. **(i)** $\frac{1}{2}$ (समान्तर भुजाओं का योग) x ऊँचाई, (ii) $2\pi r$, πr^2 (iii) $\pi r^2 h$, $2\pi rh$ **(iv)** $\frac{1}{3}\pi r^2 h$, πrl, $\pi r(l + r)$ **2.** 32.28 वर्ग सेमी, **3.** 78.57 सेमी^{2} **4.** **(i)** 9856 घन सेमी, 2200 वर्ग सेमी, 2816 वर्ग सेमी, **5.** ₹ 19250 **6.** 616 वर्ग सेमी **7.** 1.925 मीटर **8.** (ख) 12672 वर्ग मी, **9.** 1386000 लीटर, **10.** ₹ 783.75

परिशिष्ट : भारतीय प्राचीन गणितीय पद्धति

- गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त
- भाग निखिलम्
- भाग परावर्त्य
- भाग ध्वजांक विधि
- घन सूत्र अनुरूप्येण, घनमूल विलोकनम्

19.1 महान् गणितज्ञ ब्रह्मगुप्त

भारतीय गणित के इतिहास का मध्यकाल ई. सन् 400 से ई. सन् 1200 तक माना जाता है। इस काल को गणित के इतिहास का स्वर्णयुग कहा जाता है क्योंकि इसी काल में महान् भारतीय गणितज्ञों आर्यभट्ट प्रथम (499 ई.), भास्कर प्रथम (600 ई.), ब्रह्मगुप्त (598 ई.), श्रीधराचार्य (850 ई.), आर्यभट्ट द्वितीय (950 ई.), श्रीपति मिश्र (1039 ई.) नेमीचन्द्र सिद्धान्त चक्रवर्ती (11वीं शती) और भास्कराचार्य (द्वितीय) (1114 ई.) की महान् उपलब्धियाँ उनकी अमूल्य कृतियों के रूप में गणिताकाश में चमकते सूर्य जैसी प्रकाशमान हुईं।

ब्रह्मगुप्त का जन्म सन् 598 ई. में हुआ था और उनके पिता का नाम जिष्णु था। दक्षिण राजस्थान का एक छोटा-सा नगर भीलमाल (श्रीमाल) इनका जन्मस्थान माना जाता है। इन्होंने केवल 30 वर्ष की आयु में अत्यन्त प्रसिद्ध ग्रन्थ "ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त" की रचना (सन् 628 ई. में) की जिसमें 25 अध्यायों में से केवल दो अध्यायों में गणितीय सिद्धान्तों एवं विधियों का विस्तृत वर्णन किया है। शेष अध्यायों में ज्योतिष विषयक सिद्धान्तों का विवेचन किया गया है।

ब्रह्मगुप्त को अरबवासी गणितज्ञों का आदिगुरु माना जाता है। इनके "ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त" पुस्तक का भारतीय गणितज्ञों की सहायता से अरबी भाषा में अनुवाद किया गया। इन्होंने आर्यभट्ट (प्रथम) की परम्परा को आगे बढ़ाते हुए "ब्राह्मस्फुट सिद्धान्त" को श्लोकों में ही वर्णित किया है। ज्ञातव्य है कि शून्य सहित केवल दस संकेतों (0, 1, 2, 3, ...9) द्वारा "दाशमिक स्थानमानपद्धति" द्वारा सभी संख्याओं को व्यक्त करने की परम्परा आर्यभट्ट (प्रथम) द्वारा ही प्रारम्भ की जा चुकी थी। जिसका अनुसरण ब्रह्मगुप्त ने भी किया और ये प्रथम भारतीय गणितज्ञ हैं जिन्होंने बीजगणित में शून्य का प्रयोग करते हुए बताया कि

$a-0=a, -a-0=-a, 0-0=0, a\times0=0, 0\times0=0$ तथा $a\div0$ (कोई भी धन अथवा ऋण राशि ÷ 0) = अनन्त।

इन्होंने अ ÷ 0 को "तच्छेद" कहा है। यहाँ "तच्छेद" का अर्थ है "ख-छेद" अर्थात् अनन्त।

पुष्ट है कि भास्कराचार्य द्वितीय ने इसे "ख-हर" (अनन्तराशि) कहा है। आज "ख-हर" को अपरिभाषित मानते हैं। (शून्य से भाग अपरिभाषित मानी जाती है।)

ब्रह्मगुप्त ने समखात (त्रिज्या), सूची स्तम्भ और शंकु के घनफल निकालने की विधि भी दी है। इन्होंने वर्ग समीकरण ($x^2+px-q=0$) को हल करने का सूत्र $x=\frac{\sqrt{p^2+4q}-p}{2}$ भी दिया है जिससे केवल एक मूल ज्ञात होता है। आगे चल कर श्रीधराचार्य ने वर्ग समीकरण के दोनों मूल ज्ञात करने का सूत्र दिया है जो उनके नाम से आज भी प्रचलित है।

ब्रह्मगुप्त ने क, ख, ग, घ भुजाओं वाले चक्रीय चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात करने का सूत्र $\sqrt{(स-क)(स-ख)(स-ग)(स-घ)}$ भी दिया है।

जहाँ $स=\frac{क+ख+ग+घ}{2}$

ब्रह्मगुप्त का ज्यामिति के क्षेत्र में अत्यन्त सराहनीय कार्य है। उन्होंने त्रिभुजों, आयतों, समलम्बों, वर्गों इत्यादि के क्षेत्रफल से सम्बन्धित सूत्र प्रतिपादित किये हैं।

अल्बरूनी (1016 ई.) ने "इण्डिका" में ब्रह्मगुप्त के ज्योतिष एवं गणित की भूरि-भूरि प्रशंसा की है। यह कहना अतिशयोक्ति नहीं है कि ब्रह्मगुप्त भारतीय गणित के जाज्वल्यमान सितारे हैं, बल्कि विश्वगणित का इतिहास में भी इनका विशेष स्थान है। उल्लेखनीय है कि बीजगणित में ब्रह्मगुप्त ने जिन समीकरण साधनों के नियमों तथा अनिर्णीत द्विघात समीकरण का समाधान प्रस्तुत किया है, उसे ही आयलर ने 1764 ई. तथा लग्रांज ने 1768 ई. में किया है।

19.2 भाग : (निखिलम् विधि) (आधार 10, 100)

वैदिक गणित में भाग की क्रिया को सरल बनाने के लिए कई विधियाँ हैं, जिनमें एक विधि है, "निखिलम् विधि"।

इसी विधि का प्रयोग वहाँ करते हैं जहा भाजक आधार 10, 100, ... के समीप होता है। इसमें आधार से भाजक का विचलन प्राप्त कर एक संशोधित भाजक प्राप्त करते हैं, और फिर उसी से भाग की क्रिया सम्पन्न की जाती है। उदाहरण द्वारा हम इसे समझते हैं।

उदाहरण 1 : 2312 में 9 का भाग दीजिए।

हल :

	भाज्य			
भाजक 9	2	3	1	2
संशोधित भाजक		2		
10 − 9 = 1			5	
				6
	2	5	6	8

अतः भागफल = 256

शेषफल = 8

क्रियाविधि

(1) यहाँ भाजक 9 है जिसका आधार 10 से विचलन 1 है। यही संशोधित भाजक है।

(2) संशोधित भाजक में चूँकि केवल एक अंक है, अतः भाज्य 2312 में इकाई के अंक के ठीक पहले एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींच दी गई है।

(3) भाज्य का प्रथम अंक 2 यथा प्रदर्शित एक क्षैतिज रेखा खींच कर ठीक उसी के नीचे लिखा गया है। यह भागफल का पहला अंक (बायें से) होगा।

(4) अब संशोधित भाजक 1 से 2 का गुणाकर भाज्य के ठीक दूसरे अंक 3 के नीचे लिखकर इनका योग (3 + 2 = 5) क्षैतिज रेखा के नीचे 2 के आगे (दायीं ओर) लिखा गया है।

(5) अब संशोधित भाजक 1 का गुणा 5 में करके इसे भाज्य के तीसरे अंक 1 के ठीक नीचे लिखा गया है और इसके योगफल (1 + 5 = 6) को क्षैतिज रेखा के नीचे 5 के ठीक दायीं ओर लिखा गया है।

(6) अब संशोधित भाजक 1 से 6 का गुणा करके ऊर्ध्वाधर रेखा के दायीं ओर 2 के नीचे लिखा गया है। 2 और 6 का योगफल 2 + 6 = 8 यही अभीष्ट शेषफल है तथा ऊर्ध्वाधर रेखा के बायें की संख्या 256 अभीष्ट भागफल है।

टिप्पणी - प्रारम्भ में क्रियाविधि समझने में अवश्य कठिनाई का अनुभव होता होगा किन्तु अभ्यास के बाद भाग की क्रिया सरल प्रतीत होगी।

उदाहरण 2 : 21212 में 89 का भाग दीजिए।

हल : यहाँ आधार 100 से 89 का विचलन 11 है। यही संशोधित भाजक होगा। अब संशोधित भाजक 11 में 2 अंक हैं, अतः भाज्य के दायें से 2 अंक छोड़ कर ऊर्ध्वाधर रेखा खींची गयी है। शेष भागफल की क्रिया उदाहरण (1) की भाँति ही होगी।

आधार 100

भाजक 89

संशोधित भाजक 11

भाज्य

2	1	2	1		2
	2	2			
		3	3		
			7		7
2	3	7	1	1	9
				1	1
		+1	1	3	0
2	3	8		3	0

भागफल = 238

शेषफल = 30

ध्यान दें :

ऊर्ध्वाधर रेखा के दायीं ओर का योगफल 119 है जो भाजक 89 से बड़ा है, अतः संशोधित भाजक से एक बार और भाग देने की क्रिया पूर्ववत् की गयी है और तब ऊर्ध्वाधर रेखा के दायीं ओर के योगफल 130 का सैकड़े वाला अंक ऊर्ध्वाधर रेखा के ठीक बायीं ओर के अंक 7 में जोड़ कर भागफल 237 + 1 = 238 प्राप्त किया गया है।

19.3 भाग (परावर्त्य विधि)

भाजक जब आधार के समीप होता है तथा इसका प्रथम अंक 1 होता है, तब "परावर्त्य योजयेत्" सूत्र का उपयोग कर भाग की क्रिया की जाती है। इस क्रिया विधि में भाजक के प्रथम अंक (जो 1 है) को छोड़कर शेष अंकों का चिह्न बदल देते हैं। संशोधित भाजक के जितने अंक के चिह्न बदलते हैं, भाज्य के दायें से उतने ही अंक छोड़कर एक ऊर्ध्वाधर रेखा खींच देते हैं। निम्नांकित उदाहरण से क्रिया विधि स्पष्ट हो जायेगी।

उदाहरण 3 : 354223 में 11 का भाग दीजिए।

हल :

भाजक 11, परावर्त्य भाजक $\bar{1}$, आधार 10

भाज्य

	3	5	4	2	2	3
		$\bar{3}$				
			$\bar{2}$			
				$\bar{2}$		
					0	
						$\bar{2}$
भागफल =	3	2	2	0	2	1

भागफल = 32202

शेषफल = 1

क्रियाविधि

(1) भाजक 11 के प्रथम अंक 1 को छोड़कर अगले अंक का चिह्न बदल कर परावर्त्य भाजक प्राप्त किया गया है।

(2) पूर्व की भाँति भाज्य के दायें से एक अंक (जो यहाँ 3 है) को छोड़कर ऊर्ध्वाधर रेखा खींची गई है।

(3) शेष क्रिया विधि पूर्ववत् है। भागफल का प्रथम अंक (बायें से) 3 है। उसमें जब परावर्त्य भाजक $\bar{1}$ का गुणा करेंगे तो $3 \times \bar{1} = \bar{3}$ प्राप्त होगा, जो 5 के ठीक नीचे लिखा गया है। अब $5 + \bar{3}$

= 36 + 5

= 41 = बीजांक 5

अतः भाग की क्रिया एवं उत्तर शुद्ध है।

क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करने के प्रश्नों में वैदिक गणित की गुणा करने की विधियों का प्रयोग कर गणना को सुगमतापूर्वक कर सकते हैं। ध्यान देने योग्य है कि किसी साधारण संख्या में विनकुलम संख्या का गुणा ठीक उसी प्रकार से करते हैं जैसे साधारण गुणा के प्रश्नों में करते हैं।

जैसे $\bar{3} \times \bar{4} = (-3) \times (-4) = 12$

$\bar{2} \times 5 = (-2) \times 5 = -10$

$1\bar{3} \times \bar{2}1$ ऊर्ध्व तिर्यग्भ्याम् विधि से

$1\ \bar{3}$

$\times\ \bar{2}\ 1$

$1\times\bar{2}\ /\ 1\times1+\bar{2}\times\bar{3}\ /\ \bar{3}$

$=\ \bar{2}\ /\ 7\ /\ \bar{3}\ =\ \bar{2}7\bar{3}$

$=\ (-200 + 70 - 3) = -133$

उत्तर की जाँच : $1\bar{3} = 10 - 3 = 7$

$\bar{2}1 = -20 + 1 = -19$

अब $1\bar{3} \times \bar{2}1 = 7 \times (-19)$

$= -133$

19.5 वर्ग सूत्र

(1) एक न्यूनेन पूर्वेण

जब कोई संख्या अपने आधार से ठीक 1 कम होती है, तब उस संख्या का वर्ग करने के लिए इस सूत्र का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण : 999999 का वर्ग कीजिए।

हल : यहाँ दी हुई संख्या का आधार 1000000 है। तथा यह अपने आधार से ठीक 1 कम है।

अतः $(999999)^2$ का बायाँ पक्ष $= 999999 - 1$

$= 999998$

तथा उपर्युक्त का दायाँ पक्ष $= (-1)^2$

$= 000001$

(ध्यान दें, चूँकि आधार में छः शून्य हैं, अतः संख्या 999999 के वर्ग के दायें पक्ष में छः स्थान होंगे।)

अतः $(999999)^2 = 999998/000001$

$= 999998000001$ उत्तर

(2) एकाधिकेन पूर्वेण

जब किसी संख्या का इकाई वाला अंक 5 होता है तब इस सूत्र का प्रयोग करते हैं। इस संख्या के वर्ग का दायाँ पक्ष $5^2 = 25$ ही सदैव रहता है तथा इसका बायाँ पक्ष ज्ञात करने के लिए संख्या में इकाई को छोड़ शेष अंकों की संख्या में उसके उत्तरवर्ती संख्या का गुणा करते हैं।

उदाहरण : 285 का वर्ग ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त नियम विधि से वर्ग का दायाँ पक्ष $= 5^2$

$= 25$

तथा वर्ग का बायाँ पक्ष $= 28 \times (28+1)$

$= 28 \times 29$

$= 812$

अतः $(285)^2 = (812/25)$

$= 81225$ उत्तर

(3) ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

यह सर्वाधिक शक्तिशाली क्रियाविधि है। इसमें दो संख्याओं के परस्पर गुणा करने की "ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् सूत्र" का प्रयोग कर संख्या का वर्ग ज्ञात करते हैं।

उदाहरण : 3478 का वर्ग कीजिए।

हल : ह सै द इ

3 4 7 8

3 4 7 8

ह. सै. द. इ.

ह. सै. द. इ.

सै. द. इ.

सै. द. इ.

दायें से बायें के क्रम में

वर्ग का प्रथम भाग $= 8 \times 8 = 64$

वर्ग का द्वितीय भाग $= 8 \times 7 + 7 \times 8 = 2(7 \times 8) = 112$

वर्ग का तृतीय भाग $= 8 \times 4 + 4 \times 8 + 7 \times 7 = 2(4 \times 8) + 49 = 113$

वर्ग का चतुर्थ भाग $= 8 \times 3 + 3 \times 8 + 7 \times 4 + 4 \times 7 = 2(8 \times 3) + 2(4 \times 7) = 104$

वर्ग का पंचम भाग $= 7 \times 3 + 3 \times 7 + 4 \times 4 = 2(7 \times 3) + 16 = 58$

वर्ग का छठाँ भाग $= 4 \times 3 + 3 \times 4 + = 2(4 \times 3) = 24$

वर्ग का सातवाँ भाग $= 3 \times 3 = 9$

अतः $(3478)^2 =$

दस लाख	लाख	द.ह.	ह.	सै.	द.	इ.
9	24	58	104	113	112	64

$=$ 12096484 उत्तर

टिप्पणी : क्रिया-विधि समझ लेने के बाद इस विधि से किसी भी संख्या का वर्ग एक पंक्ति में कर सकते हैं। क्रम से दायें से बायें बढ़ते हुए, हासिलों को मस्तिष्क में रखते हुए तथा इनको यथास्थान जोड़ते हुए संख्या का वर्ग सरलतापूर्वक कर सकते हैं।

वास्तव में इस क्रियाविधि में सूत्र

$$((a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca)$$

का ही प्रयोग करते हैं।

यदि संख्या में केवल एक अंक है, तब $(a)^2 = a \times a = a^2$

यदि संख्या में दो अंक है तो $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

तथा यदि संख्या में 4अंक है तो $(a+b+c+d)^2 = a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2ac+2ad+2bc+2bd+2cd$ का प्रयोग करते हैं।

संख्या के वर्ग का बीजांक विधि से जाँच

संख्या 3478 का बीजांक $= 3+4+7+8 = 4$

अब 4 के वर्ग 16 का बीजांक $= 7$

अब $(3478)^2 = 12096484$ का बीजांक $= 7$

अतः उत्तर सही है।

19.6 वर्गमूल विलोकनम्

किसी संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने की विधि निम्नांकित उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

उदाहरण 1 : 4096 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : दायें से बायें के क्रम में 2-2 का युग्म बनाते हैं।

स्पष्टतः ये युग्म 96 एवं 40 होंगे। अतः 4096 के वर्गमूल के दो अंक होंगे।

अब वर्गमूल ज्ञात करने की क्रिया विधि देखें।

```
      6 4
   ---------
 6 | 4 0 9 6
   - 3 6
   ---------
       4 9
     - 4 8
     -------
         1 6
       - 1 6
       -----
         0 0
```

$2a = 2 \times 6 = 12$ (भाजक संख्या) अब $12 \times 4 = 48$ घटायेंगे। यही 4 वर्गमूल का अगला अंक होगा अर्थात् $b = 4$ अब $b^2 = 4^2 = 16$ घटायेंगे।

(i) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ में हम देखते हैं कि 6^2 ही वह वर्ग संख्या है जो 40 से ठीक छोटी है क्योंकि $7^2 = 49$, 40 से बड़ा है, अतः $7^2 = 49$ ग्राह्य नहीं है।

(ii) 40 में से 6^2 घटाने पर शेष 4 बचता है। हम इसके आगे केवल एक अंक (जो 9 है) ही उतारते हैं।

(iii) 49 में से 48 घटाने पर शेष 1 बचा, इसके आगे ऊपर से अगला अंक 6 उतारेंगे। अब इस प्रकार प्राप्त संख्या 16 में से $4^2 = 16$ घटायेंगे।

अतः $\sqrt{4096} = 64$ उत्तर

उदाहरण 2 : 15625 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त क्रियाविधि का प्रयोग करते हुए हम देखते हैं कि $15625 = \overline{1}\,\overline{56}\,\overline{25}$

अतः 15625 के वर्गमूल में कुल 3 अंक होंगे।

ध्यान दीजिए, उदाहरण (1) में वर्णित विधि के अनुसार हम शेषफल के ठीक आगे ऊपर से केवल एक अंक ही उतारते हैं। आज की वर्गमूल की प्रचलित विधि के अनुसार हम कभी भी जोड़ी को नहीं उतारते हैं।

$2 \times 1 = 2$ (भाजक संख्या)
$2 \times 2 = 4$ वर्गमूल का द्वितीय अंक 2 है, अतः $2^2 = 4$ घटायेंगे। अब यहाँ वर्गमूल के प्रथम दो अंकों से बनी संख्या (12) है, हम इसका दुगुना कर नयी भाजक संख्या $2 \times 12 = 24$ प्राप्त करेंगे।

हम देखते हैं कि $24 \times 5 = 120$ जो 122 से कम है। अतः 122 में से 120 घटायेंगे तथा वर्गमूल का अगला अंक 5 होगा अब $5^2 = 25$ घटायेंगे।

```
      (12)5
1 | 1 5 6 2 5
  | 1
  |---------
  | × 5
  | - 4
  |---------
  |   1 6
  |
  |  - 4
  |---------
  |   1 2 2
  |  -1 2 0
  |---------
  |     2 5
  |   - 2 5
  |---------
  |     × ×
```

अतः $\sqrt{15625} = 125$ उत्तर

टिप्पणी : हम देखते हैं कि पूर्ण वर्ग संख्या 15625 में बायें से तीन अंकों से बनी संख्या 156 में से वर्गमूल के बायें से दो अंकों की संख्या 12 का वर्ग 144 घटाने पर शेषफल 16 प्राप्त होता है, अतः यह जाँच है कि हल के उपर्युक्त चरण शुद्ध हैं।

ध्यान दें

n अंकों वाली किसी पूर्ण वर्ग संख्या में यदि n विषम है तो उस संख्या के वर्गमूल में अंकों की संख्या सदैव $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ होती है और यदि n सम है तो वर्गमूल में अंकों की संख्या सदैव $\left(\frac{n}{2}\right)$ होती है।

(321)

19.7 घनसूत्र (आनुरूप्येण)

किसी दो अंकों वाली संख्या का घन ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम उसके अंकों के बीच का अनुपात ज्ञात करते हैं और फिर प्रथम अंक (दहाई वाला अंक) का घन ज्ञात कर प्रथम स्तम्भ में लिखते हैं। उसके ठीक आगे के स्तम्भ में हम स्तम्भ वाली घन संख्या में संख्या के (इकाई : दहाई) वाली संख्या का गुणा कर लिखते हैं। पुनः तीसरे स्तम्भ में द्वितीय स्तम्भ वाली संख्या में उपर्युक्त अनुपात वाली संख्या से गुणा कर लिखते हैं और पुनः चौथे स्तम्भ में भी इसी विधि का अनुसरण करते हुए तीसरे स्तम्भ वाली संख्या में उपर्युक्त आनुपातिक संख्या का गुणा कर लिख देते हैं। चौथे स्तम्भ में इस प्रकार लिखी हुई संख्या निश्चय ही दी हुई संख्या के इकाई के अंक का ही घन होना चाहिए। यदि ऐसा नहीं है तो निश्चय ही गणना में कहीं कोई त्रुटि हुई होगी।

अब हम उदाहरणों के द्वारा इसे समझते हैं।

उदाहरण 1 : 36 का घन कीजिए

हल : $3^3 = 27$ | $27 \times \frac{6}{3} = 54$ | $54 \times \frac{6}{3} = 108$ | $108 \times \frac{6}{3} = 216$

यहाँ हम देखते हैं कि 36 में इकाई 6, दहाई 3 का दुगुना है, अतः हम सीधे स्तम्भ की संख्या $3^3 = 27$ प्राप्त कर क्रमशः दुगुना करते हुए शेष तीनों स्तम्भों की संख्याएँ 54, 108 व 216 प्राप्त कर सकते हैं।

अब इसके आगे मध्य के दो स्तम्भों में ऊपर वाली संख्या का दुगुना कर इनके नीचे लिख कर स्तम्भों की संख्याओं का निम्नवत् योग प्राप्त करते हैं :

$(36)^3 =$ दस.ह	ह.	सै.	द.	इ.
		1	1	
	19	34	21	
	27	54	108	216
		108	216	
4	6	6	5	6

अतः $(36)^3 = 46656$ उत्तर

उपर्युक्त स्तम्भों की संख्याओं के योगफलों को निम्नवत् जोड़कर घन वाली संख्या के इकाई, दहाई, सैकड़ा, हजार एवं दस हजार के अंकों को ज्ञात करें।

```
    2 1 6
  3 2 4
1 6 2
2 7
---------
4 6 6 5 6
```

उदाहरण 2 : 69 का घन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ इकाई : दहाई = 9 : 6 = $\frac{3}{2}$ है।

अतः

$(69)^3 = \Big|\ 6^3 = 216\ \Big|\ 216 \times \frac{3}{2} = 324\ \Big|\ 324 \times \frac{3}{2} = 486\ \Big|\ 486 \times \frac{3}{2} = 729$

स्पष्टतः 729 = $(9)^3$ अतः चारों स्तम्भों की संख्याएँ शुद्ध हैं।

अब आगे की क्रिया विधि के चरण देखें -

$(69)^3$ =

द.ह.	ह.	सै.	द.	इ.
	216	324	486	729
		648	972	
	216	972	1458	729
32	8	5	0	9

```
     7 2 9
   1 4 5 8
   9 7 2
 2 1 6
-----------
 3 2 8 5 0 9
```

अतः $(69)^3$ = 328509 उत्तर

उदाहरण 3 : 125 का घन कीजिए।

यहाँ 125 में (12) को एक साथ लेकर चलेंगे। और तब 5 और 12 के बीच का अनुपात $\frac{5}{12}$ लेकर उपर्युक्त विधि से आगे बढ़ेंगे।

$(125)^3 = \Big|\ (12)^3 = 1728\ \Big|\ 1728 \times \frac{5}{12} = 720\ \Big|\ 720 \times \frac{5}{12} = 300\ \Big|\ 300 \times \frac{5}{12} = 125\ \Big|$

अतः $(125)^3$ =

1728	720	300	125
	1440	600	
1728	2160	900	125

```
          1 2 5
        9 0 0
    2 1 6 0
  1 7 2 8
-----------------
  1 9 5 3 1 2 5
```

अतः $(125)^3$ = 1953125 उत्तर

ध्यान दें : यदि a और b अंकों से कोई संख्या बनी है तो $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ होता है। उपर्युक्त क्रिया विधि में,

प्रथम स्तम्भ में a^3 वाली संख्या है,

द्वितीय स्तम्भ वाली संख्या $a^3 \times \frac{b}{a} = a^2b$

तृतीय स्तम्भ की संख्या $a^2b \times \frac{b}{a} = ab^2$ है।

और चतुर्थ स्तम्भ की संख्या $ab^2 \times \frac{b}{a} = b^3$ है।

अतः चारों स्तम्भों की संख्याएँ, क्रमशः (a^3, a^2b, ab^2, b^3) हैं। इसी कारण मध्य के स्तम्भों की संख्याओं का दुगुना उनके नीचे लिखकर उनका योग करते हैं, जिससे $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ प्राप्त हो जाय।

19.8 घनमूल विलोकनम

हम उपर्युक्त सूत्र $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ के आधार पर पूर्णघन संख्याओं का घनमूल ज्ञात करें और यहाँ ध्यान दें कि एक अंक वाली संख्या के घन में 1 या 2 या 3 अंक होंगे, जैसे :

$1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, $7^3 = 343$, $8^3 = 512$ और $9^3 = 729$

यदि संख्या में 2 अंक हैं तो उसके घन में 4 या 5 या 6 अंक होंगे। 3 अंकों वाली संख्या के घन में 7 या 8 या 9 अंक होंगे।

व्यापक रूप में n अंको वाली संख्या के घन में (3n–2) या (3n-1) या 3n अंक होते हैं।

इसीलिए पूर्ण घन संख्या का घनमूल ज्ञात करने में हम दायें से बायें के क्रम में 3-3 अंकों के समूह बनाकर घनमूल में अंकों की संख्या ज्ञात कर लेते हैं। सबसे बायें वाले समूह में 1 या 2 अंक भी हो सकते हैं।

अब हम उदाहरणों के माध्यम से घनमूल ज्ञात करना समझते हैं।

उदाहरण 1 : 13824 का घनमूल ज्ञात कीजिए

$2^3 = 8$ घटाया

भाजक संख्या $3a^2 = 3\times2^2 = 12$

$12\times4 = 48$ घटाया

यहाँ $b = 4$ प्राप्त

अब $3ab^2 = 3\times2\times4^2 = 96$ घटाया

पुनः $b^3 = 4^3 = 64$ घटाया

```
   24
 ______
 1̅ 3̅8̅2̅4̅
 -8
 ______
 58
 -48
 ______
 102
 -96
 ______
 64
 -64
 ______
 ××
```

अतः 13824 का घनमूल = 24 है।

टिप्पणी : घनमूल में भी वर्गमूल की भाँति शेषफल के आगे ऊपर (दी हुई संख्या) में क्रमशः एक-एक अंक ही उतार नये भाज्य प्राप्त करते हैं तथा भाजक क्रमशः $a^3, 3a^2b, 3ab^2$ तथा b^3 मान वाली संख्याएँ ही होती हैं।

उदाहरण 2 : 1953125 का घनमूल ज्ञात कीजिए।

हल : 1953125 = 1 9̅5̅3̅ 1̅2̅5̅

अतः घनमूल में 3 अंक होंगे। क्रियाविधि पूर्ववत् ही रहेगी।

$1^3 = 1$ घटाया

$3a^2 = 3\times1^2 = 3$ (भाजक)

$3\times2 = 6$ घटाया

स्पष्टतः $b = 2$

अब $3(ab^2) = 3\times1\times2^2 = 12$ घटाया

$b^3 = 2^3 = 8$ घटाया

अब $a = 12$ मानेंगे।

$(12)^3$ तक घटा चुके हैं अतः अब $3a^2 = 3\times12^2 = 432$ नयी भाजक संख्या है।

स्पष्टतः 2251 में 5 बार भाग जायेगा।

अतः घनमूल का अगला अंक 5 होगा।

$3ab^2 = 3\times(12)\times5^2 = 900$ घटाया

$b^3 = 5^3 = 125$ घटाया

```
   (12)5
 ____________
 1 9̅5̅3̅ 1̅2̅5̅
 -1
 ____________
 ×9
 -6
 ____________
 35
 -12
 ____________
 233
 -8
 ____________
 2251
 -2160
 ____________
 91
 912
 -900
 ____________
 125
 -125
 ____________
 ×××
```

आप देख सकते हैं कि 1953 में से $(12)^3 = 1728$ घटाने पर 225 प्राप्त होता है। अतः घनमूल के चरण पूर्णतः शुद्ध है।

अतः 1953125 का घनमूल = 125 उत्तर

विशेष टिप्पणी

यदि हम 1 से लेकर 9 तक के अंकों के घन (जो क्रमशः 1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729 हैं) पर ध्यान दें तो पाते हैं कि घनवाली संख्या के इकाई के स्थान पर जो अंक प्राप्त होते हैं, वे अद्वितीय हैं, उनकी कभी भी दुबारा आवृत्ति नहीं होती है। अतः यदि दी हुई संख्या पूर्ण घन है तो उसके घनमूल में इकाई का सही अनुमान लगा सकते हैं, उदाहरण (1) में 13824) के घनमूल में इकाई 4 है और उदाहरण (2) में 1953125 के घनमूल में इकाई का अंक 5 है।